Dos aplicaciones de la Fórmula de Feynman-Kac

José R. León R
IMERL

Resumen:

En la década de los cuarenta del siglo pasado Marc Kac, bajo la influencia de la tesis de doctorado de Richard Feynman, demostró que la solución de la EDP parabólica

$$\begin{aligned} \partial_t u(t,x) &= -Hu(t,x), \quad Hu = \frac{1}{2}\Delta u + V(x) \\ u(0,x) &= f(x) \quad x \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

Que se escribe formalmente, usando la teoría de semigrupos, como $u(t,x) = e^{-tH}f(x)$, tiene la siguiente representación probabilística

$$u(t,x) = \mathbb{E}[e^{-\int_0^t V(x+W_s)ds} f(x+W_t)]. \tag{1}$$

Donde $\{W_s\}_{s\geq 0}$ es el Movimiento Browniano estándar en $\mathbb{R}^d$. La relación (1) recibe el nombre de Fórmula de Feynman-Kac.
En esta charla daré dos aplicaciones de esta fórmula

1. Se encontrará la fórmula exacta, a través del método Montecarlo, y una fórmula aproximada, para t pequeño, de la densidad de transición de la difusión de Wright-Fisher (modelo con múltiples aplicaciones en Genética)

$$\begin{aligned} dX_t &= \sqrt{X_t(1-X_t)}dW_t \quad X_t \in [0,1] \\ X_0 &= x_0 \end{aligned}$$

2. La fórmula se aplicará para estudiar el comportamiento asintótico, cuando $\varepsilon \to 0$, de la densidad de transición de la difusión

$$\begin{aligned} dX_t &= \varepsilon dW_t + \nabla U(X_t)dt \quad X_t \in \mathbb{R}^d \\ X_0 &= x_0 \end{aligned}$$

   Cuando $U(x) = \theta(\frac{x}{|x|})|x|^{1+\gamma}$, con $0 < \gamma < 1$ y $\theta > 0$, una función con dos derivadas continuas en un abierto que contiene a la esfera $\mathbb{S}^{d-1}$. Notemos que cuando $\varepsilon = 0$ el sistema de ecuaciones determinísticas asociado posee infinitas soluciones, es decir estamos en la condiciones del teorema de Peano.

Los resultados anteriores son el resultado de un trabajo conjunto. El primero con M. Fariello, T. Rojas y G. Martínez y el segundo con P. Bermolen y V. Goicochea.