
Estrategias óptimas de reaseguro proporcional para una cartera de pólizas de incendio

Cecilia García

Daniela Ayala

Marco Scavino

Nº3/22

1er semestre, 2022

Universidad de la República.
Facultad de Ciencias Económicas y de Administración,
Instituto de Estadística (IESTA)

Montevideo, Uruguay.



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución - NoCo-
mercial - CompartirIgual 4.0 Internacional.

Forma de citación sugerida para este documento:

Cecilia García, Daniela Ayala, Marco Scavino (2022). *Estrategias óptimas de reaseguro proporcional para una cartera de pólizas de incendio* (Serie Documentos de Trabajo; Nº3/22). Montevideo: Universidad de la República. Facultad de Ciencias Económicas y de Administración, Instituto de Estadística.

<https://www.colibri.udelar.edu.uy/jspui/handle/20.500.12008/10518>

Estrategias óptimas de reaseguro proporcional para una cartera de pólizas de incendio

Cecilia García ¹; Daniela Ayala ² Marco Scavino ³;
Instituto de Estadística
Facultad de Ciencias Económicas y de Administración
Universidad de la República

Resumen

Una compañía de seguros puede optar por transferir y distribuir a una compañía reaseguradora parte de los riesgos asumidos en su cartera de pólizas, a los efectos de mitigar pérdidas que podrían generar inconvenientes financieros y en su capacidad económica.

La relación entre la aseguradora directa y la reaseguradora se realiza mediante un contrato de reaseguro, en el que se establecen las obligaciones entre ambas partes.

En el presente trabajo se consideran contratos de reaseguro proporcional de tipo cuota parte y excedente, en los cuales el reasegurador asume una proporción determinada de las primas y de los siniestros.

Dada una cartera de pólizas de seguros nacionales contra incendio, el objetivo principal de este trabajo es determinar el nivel óptimo de retención de riesgo que corresponde a los contratos de reaseguro considerados, desde la perspectiva del enfoque de media-varianza propuesto por Bruno de Finetti (de Finetti, 1940). Bajo el supuesto de riesgos independientes, para cada contrato seleccionado, se encuentra la solución al problema de optimización convexa correspondiente. Dada una selección de distribuciones de probabilidad para la exposición al riesgo y el costo agregado de los siniestros, se muestra cómo hallar en R (R Core Team, 2022) las tasas de retención óptimas por clase de riesgo, también en el caso de que se requiera un truncamiento de las mismas, así como otras características de la cartera en consideración que son relevantes para comparar los resultados obtenidos.

Palabras clave: Reaseguros proporcionales; reaseguro cuota parte; reaseguro de excedente; nivel de retención óptimo; criterio media-varianza; distribuciones de probabilidad MBBEFD y Gamma-shifted.

CÓDIGOS JEL: G22, G11, D81, B23.

Clasificación MSC2010: 91B30, 62P05, 90C20.

¹ *email:* cecigarcia503@gmail.com , ORCID:

² *email:* daniela.ayala.22@gmail.com, ORCID:

³ *email:* marco.scavino@fcea.edu.uy, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5114-853X>

ABSTRACT

An insurance company may opt to transfer and distribute to a reinsurance company part of the risks assumed in its policy portfolio to mitigate losses that could generate financial inconveniences and weak its economic capacity.

The relationship between the direct insurer and the reinsurer is carried out through a reinsurance contract, which specifies the obligations between both parties.

In the present work, proportional reinsurance contracts of quota-share and surplus type are considered, in which the reinsurer assumes a certain proportion of the premiums and claims.

Given a portfolio of national fire insurance policies, the main objective of this work is to determine the optimal level of risk retention that corresponds to the selected reinsurance contracts from the perspective of the mean-variance approach proposed by Bruno de Finetti (de Finetti, 1940). Under the assumption of independent risks, for each selected contract, the solution to the corresponding convex optimization problem is found. Given a selection of probability distributions for risk exposure and aggregate cost of claims, it is shown how to find in R (R Core Team, 2022) the optimal retention rates by risk class, also in the cases that require their truncation, as well as other characteristics of the portfolio under consideration that is relevant to compare the obtained results.

Key words: Proportional reinsurance; quota-share reinsurance; surplus treaty; optimal retention level; mean-variance criterion; MBBEFD and Gamma-shifted probability distributions.

JEL CODES: G22, G11, D81, B23.

Mathematics Subject Classification MSC2010: 91B30, 62P05, 90C20.

1. Introducción

Los antecedentes históricos del reaseguro que se van a manejar en este trabajo se basan en los textos de Canestraro (2006), Albrecher *et al.* (2017) y Holland (2009). Los orígenes del reaseguro son muy antiguos, se podría decir que tanto como los del seguro mismo y, si bien existen pocos documentos que lo comprueben, se puede afirmar que ambos surgen como una herramienta para el comercio marítimo.

Desde sus orígenes el reaseguro se usó como un método para remediar un acto imprudente por parte del asegurador al momento de suscribir a un riesgo. El mismo, sin afectar su obligación para con el asegurado, recurría a otro asegurador mejor informado, o con mayores posibilidades financieras, para protegerse total o parcialmente.

El primer contrato de reaseguro del que se tiene conocimiento se remonta al año 1370 y se refería a un cargamento que se debía transportar desde Génova (Italia) a Sluys (Holanda) y que ya había sido asegurado, pero se reaseguró para la última parte de la ruta, desde Cadiz (España) a Sluys, debido a la peligrosidad de la travesía (probablemente por el riesgo de piratería).

Entre los siglos XIV y XVIII el centro de la actividad de seguros se trasladó desde las repúblicas marítimas italianas a Londres. Es en esta ciudad que la cafetería del señor Edward Lloyd cumple un rol fundamental para la actividad aseguradora, siendo punto de encuentro para la gente del mar, agentes de seguros, comerciantes y armadores.

Aún en estas épocas, no se contaba con el conocimiento actuarial moderno, implicando que las formas de seguro existentes se basaban en el carácter especulativo, el cual hacía que además de los suscriptores que se podrían llamar “serios y confiables”, existieran personas con intenciones fraudulentas. Estas personas llevaban a cabo prácticas, que de hecho carecían de valor real, y motivaron en 1745 al Rey Jorge II de Inglaterra a promulgar una ley que declaraba ilegales ciertos tipos de seguros marítimos y prohibía el reaseguro, excepto en el caso de que el asegurador se volviera insolvente, cayera en bancarota, o muriera. Esta prohibición del reaseguro marítimo permaneció vigente en Inglaterra por más de un siglo.

A principios del siglo XIX en el continente europeo se popularizó una única forma de reaseguro, la opcional, utilizada generalmente para la rama de incendios, en la cual las compañías de seguros se ofrecían mutuamente la parte del riesgo que no estaban capacitadas para asumir. Esta práctica se basa en el hecho de que las empresas jóvenes no podían agrandar sus carteras sin aumentar su probabilidad de ruina.

El desarrollo de la industria y el comercio a lo largo de la primer parte del siglo XIX fue seguido por un aumento en la demanda de seguros y un aumento en las sumas aseguradas. Esto provocó que el reaseguro no fuera utilizado sólo en casos particulares sino que se convirtiera en un instrumento de uso habitual, logrando ser una actividad comercial en sí misma.

En principio, los contratos de reaseguro se efectuaban en reciprocidad entre compañías

locales, pero luego, debido a la desconfianza que generaba a las aseguradoras el brindar información en detalle de los riesgos cedidos a sus competidoras, se recurrió al uso de compañías extranjeras. Sin embargo, a mediados del siglo XIX, cuando el flujo de divisas por motivo de reaseguros comenzó a tomar magnitudes de importancia se crearon las primeras compañías de reaseguro profesionales, eliminando las preocupaciones en cuanto al uso de la información con fines competitivos, ya que las mismas sólo administraban negocios indirectos.

Hoy en día muchas de las compañías reaseguradoras que se fundaron entre los siglos XVIII y XIX siguen aún trabajando como tales. Algunas sólo como reaseguradoras y otras como aseguradoras-reaseguradoras. Tales son los casos de la famosa *Lloyds of London* (Inglesa), la *Swiss Reinsurance Company* (Suiza), y la *Münchener Rück* (Alemana).

1.1. Aspectos generales de los reaseguros

Para comenzar se definirá la operación de reaseguro con el objeto de esclarecer el tipo de negocio que se está tratando. Canestraro en su trabajo *Metodologie di pricing per le riassicurazioni non proporzionali: il modello di Pareto* (Canestraro, 2006) define al reaseguro de la siguiente manera:

Es una relación contractual cuyo objeto es la transferencia mediante el pago de una prima, de parte de los riesgos asumidos por la aseguradora directa, a un segundo sujeto que puede ser otra aseguradora que también realiza negocios indirectos o una reaseguradora profesional. (p. 14)

Una operación de reaseguro se puede definir como una relación contractual entre dos sujetos, el cedente (aseguradora directa) y el cesionario (reaseguradora), mediante la cual el segundo toma a su cargo total o parcialmente el riesgo asumido por el primero.

Mediante esta definición se puede ver claramente que el objetivo principal del reaseguro es reducir la posible pérdida de la aseguradora directa mediante la distribución del riesgo. Pero no es la única causa que justifica la utilización del mismo. A continuación se listarán algunas de las características adicionales:

- Permite a la aseguradora directa homogeneizar cuantitativamente el tamaño de sus exposiciones al riesgo equilibrando los activos y pasivos de la misma.
- A través del uso del reaseguro una empresa puede aumentar significativamente su capacidad para tomar mayor cantidad de riesgos o bien riesgos de mayor entidad, ganando valor y prestigio en los mercados en los que opera.
- La aseguradora puede verse beneficiada del vasto conocimiento de la reaseguradora, ya que la última en general cuenta con una mayor experiencia en el ámbito nacional e

internacional y puede prestar asesoramiento teórico y práctico en algunas situaciones en que la empresa cedente se encontrara en dificultad.

- Genera confiabilidad al hacer que las pólizas sean más atractivas para los asegurados ya que el reaseguro brinda a la compañías mayor estabilidad.

Por lo tanto el reaseguro no puede constituirse si no existe un contrato de seguro, pero habiendo considerado las causas justificantes del mismo, se puede afirmar que el seguro no podría existir (o lo haría muy precariamente) sin la existencia del reaseguro.

Cabe destacar que una parte importante de esta operación es la redacción del contrato de reaseguro, ya que éste regulará la transferencia de riesgos entre las partes. El mismo deberá contener una serie de cláusulas de carácter técnico, comercial y legal entre las que se destacan: la fecha de inicio y vencimiento del contrato, los límites de la cobertura en términos de retención y alcance, el monto de la prima, las comisiones de retención y cesión, las cláusulas de arbitraje, entre otras.

Para finalizar, se debe tener en cuenta que la responsabilidad de la reaseguradora es con la aseguradora directa, no con el asegurado. Utilizando el esquema presentado por Arónica (2012)

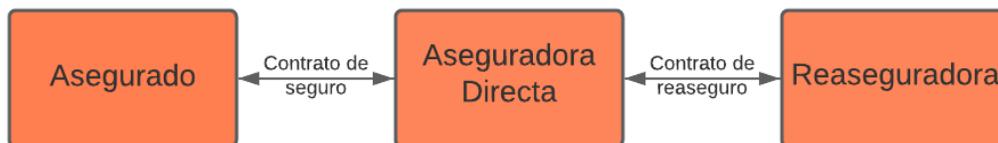


Figura 1: Relación entre asegurado, aseguradora directa y reaseguradora, tomado de (Arónica, 2012)

Una tarea fundamental para la empresa aseguradora es determinar la capacidad propia de retención del riesgo, es decir, el monto o proporción de riesgo del que puede responsabilizarse, sin exceder su capacidad económica y financiera.

Esa cantidad o proporción dependerá no solo de las características particulares de la cartera que se quiere reasegurar (sumas aseguradas, frecuencia o severidad relativa de los siniestros, tipos de cobertura, clases de riesgo en las que está dividida la cartera), sino que también dependerá de otros factores relacionados con lo económico, tales como las primas cobradas, las cargas de seguridad de la aseguradora y de la reaseguradora, la ganancia que se espera obtener y el margen de solvencia de la empresa, entre otras. Luego de calculado ese monto o proporción máxima de riesgo, todo lo que supere ese umbral, será transferido en reaseguro.

La organización del documento es la siguiente: en la primera sección se introduce el problema bajo estudio, con una breve reseña de antecedentes; en la sección 2 se presenta la metodología empleada, en la sección 3 el caso de estudio para una cartera de pólizas de seguro nacionales contra incendio. La sección 4 contiene los resultados que refieren a cuatro contratos de reaseguro de tipo proporcional. Las conclusiones se presentan en la sección 5.

Con respecto al ciclo de vida de este trabajo se deja constancia que el primer gran avance de esta investigación surge del Trabajo Final de Grado (TFG) *Formas de Reaseguro Óptimas* (Ayala y García Chabat, 2021) en <https://hdl.handle.net/20.500.12008/30563> presentado en el Seminario del IESTA del 8 de diciembre 2021 *Formas de Reaseguro Óptimas* en Montevideo previo a la elaboración de este DT.

El código computacional y los datos en los que se basa este trabajo están disponibles en el repositorio <https://gitlab.com/meda3/reaseguros-optimos>.

2. Metodología

Se pueden diferenciar dos grandes clases de reaseguro: reaseguros proporcionales y reaseguros no proporcionales. A continuación se detallarán cada una de éstas.

2.1. Reaseguros Proporcionales

En las formas proporcionales de reaseguro el asegurador y el reasegurador acuerdan a priori una proporción (de aquí en adelante *tasa de retención*) que se utilizará para asignar primas y compensaciones. Dicha proporción podrá ser común a todos los contratos de la cartera o en su defecto podrá variar contrato a contrato.

En esta clase de reaseguros se distinguen dos tipos de contratos: los contratos de reaseguro cuota parte y los contratos de reaseguro excedente.

El **Contrato cuota parte** es la forma más simple de reaseguro proporcional desde el punto de vista operativo y de gestión. El mismo consiste en la implementación de una única tasa de retención para todo un ramo de contratos. Es decir, la aseguradora acepta retener un cierto porcentaje fijo de primas y riesgo, y la reaseguradora se compromete a hacerse cargo de la parte transferida.

Un caso particular de este tipo de contratos de reaseguro es el reaseguro **cuota parte variable**, donde se subdivide la cartera en clases homogéneas de riesgo, y se aplica una tasa de retención particular a cada una de ellas.

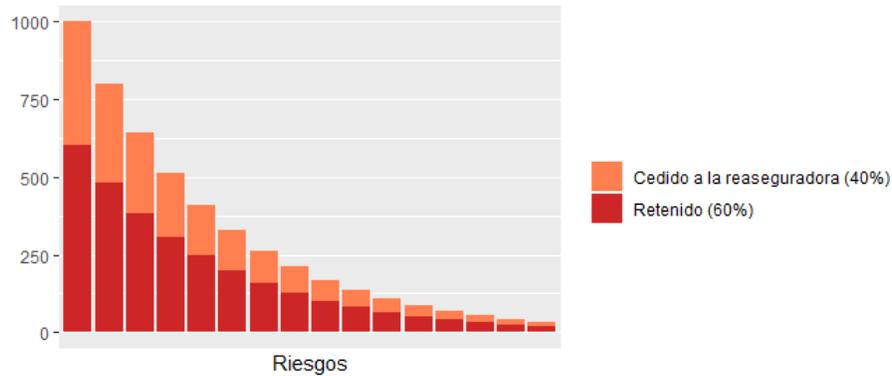


Figura 2: Reaseguro cuota parte con tasa de cesión de 40 %

En cambio **Contrato de excedente** es una forma más compleja y sofisticada de reaseguro proporcional. En este caso, la aseguradora acepta mantener para cada contrato un monto fijo de exposición al riesgo, llamado “*pleno de retención*” y cede a la reaseguradora una proporción de las primas igual a la proporción de suma asegurada que excede este monto. Asimismo, la reaseguradora acepta hacerse cargo del riesgo que exceda el pleno de retención hasta un cierto límite.

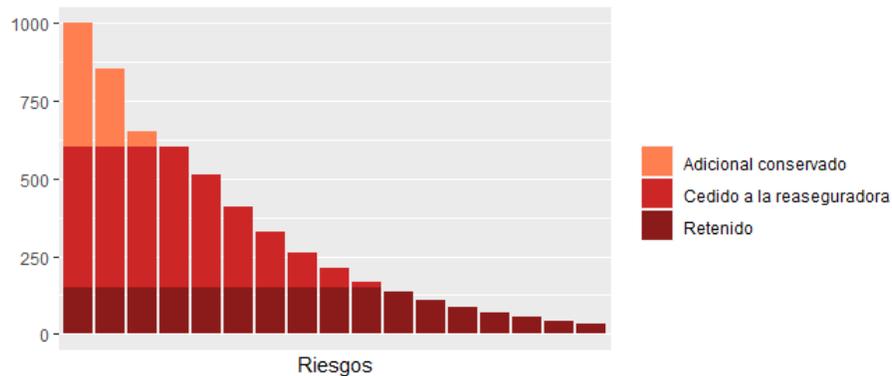


Figura 3: Reaseguro excedente considerando un pleno de retención igual a 150, uno conservado por el asegurador y tres cedidos en reaseguro

También en estos tipos de contrato existe un caso particular llamado **contrato excedente con tabla de líneas**, donde se divide la cartera en clases homogéneas de riesgo y se fija un pleno de retención dentro de cada una de éstas.

2.2. Reaseguros No Proporcionales

En esta modalidad de reaseguro, no se fija de antemano una proporción de primas y riesgo a repartir, sino que la reaseguradora protege a la aseguradora de las pérdidas. Es decir, la aseguradora participa a la reaseguradora cuando los siniestros superan una cierta cantidad.

Dentro del tipo de reaseguros no proporcionales existen dos clases a tener en cuenta: los contratos por exceso de pérdida (*excess of loss*) y los contratos por exceso de siniestralidad (*stop loss*).

Para el **Contrato exceso de pérdida** el asegurador y reasegurador definen un monto monetario, llamado *prioridad*, dentro del cual el primero se hará cargo de los reembolsos, mientras que el segundo cubrirá el exceso de pérdida hasta un límite de cobertura acordado llamado *alcance*.

Este tipo de reaseguro no proporcional presenta las siguientes variantes:

- Reaseguro por riesgo de exceso de pérdida (WXL/R):
Protege al asegurado riesgo a riesgo, es decir, las cantidades monetarias que caracterizan al contrato son definidas a nivel global pero las compensaciones refieren a cada contrato individual. Este tipo de contrato es ideal cuando ocurren grandes siniestros individuales.
- Reaseguro por exceso de pérdida por evento. (WXL/E):
En este caso la prioridad y el alcance se definen en base a un único evento, no en base a un único siniestro. Este tipo de contrato es ideal cuando se cuenta con una gran cantidad de pequeños riesgos referidos a un único evento.

Los contratos **Contrato stop loss** ofrecen una cobertura más amplia para la aseguradora ya que se define la prioridad no en términos monetarios sino en términos porcentuales. Dicho porcentaje se calculará como un ratio de pérdida, es decir siniestros netos/primas netas.

En este caso el reasegurador protegerá al cedente por el resultado de la siniestralidad global de un período (por ejemplo un año), no de los siniestros individuales.

Como se mencionó anteriormente, el objetivo del presente trabajo es determinar el tipo de reaseguro óptimo para una cartera de pólizas de incendio. Para alcanzar este objetivo el primer paso será la elección de los tipos de reaseguro a analizar para la cartera objeto de estudio.

Una vez elegidos los tipos de reaseguro a utilizar, es necesario abordar el problema de la determinación del nivel de retención. Varios autores han trabajado en este sentido y han propuesto diversas respuestas a esta problemática cuando se consideran esquemas específicos para el reaseguro de un conjunto de pólizas (una cartera o una rama de seguros) (Centeno, 2006).

Por un lado, se encuentran aquellos autores que han encontrado la forma de determinar el nivel de retención a partir de los momentos de la distribución del costo agregado de los siniestros como por ejemplo fijando un nivel de ganancia o beneficio y minimizando la varianza del riesgo retenido, o maximizando la ganancia esperada sujeto a una restricción en el nivel de varianza del riesgo retenido, entre otras.

Otros autores proponen que la determinación del nivel de retención puede ser realizada a partir del coeficiente de ajuste de los reclamos agregados o mediante la probabilidad de ruina.

El primero en estudiar el problema del reaseguro cuando se tienen en consideración varios riesgos por separado fue *Bruno de Finetti* (de Finetti, 1940). Para obtener el nivel de retención, *de Finetti* consideró un conjunto de n riesgos independientes y resolvió el problema utilizando el criterio de minimización de la varianza del riesgo retenido sujeto a un nivel de ganancia esperado constante.

Este procedimiento será el utilizado en el presente trabajo para buscar el nivel de retención que permita a la empresa aseguradora minimizar la variabilidad de la ganancia que se espera obtener luego de un contrato de reaseguro proporcional.

2.3. La ganancia del asegurador para reaseguro proporcional

Supongamos que se tiene una cartera con n riesgos independientes, S_1, \dots, S_n , con primas P_1, \dots, P_n , reasegurados mediante un reaseguro proporcional, con tasas de retención α_i , $i = 1, \dots, n$, es decir que el asegurador retendrá una proporción α_i del riesgo que corresponde a esta cartera o para cada clase de riesgo dentro de la misma.

Vamos a suponer también que la reaseguradora carga la prima mediante el principio del valor esperado con un cargamento ρ_i^R , por lo tanto la prima de reaseguro estará dada por $(1 + \rho_i^R)(1 - \alpha_i)ES_i$.

La ganancia del asegurador estará dada por la suma de las primas que recibe, menos la suma de las primas que cede al reasegurador, menos la suma de lo que paga por siniestros, es decir:

$$Z(\bar{\alpha}) = \sum_{i=1}^n (P_i - (1 + \rho_i^R)(1 - \alpha_i)ES_i - \alpha_i S_i) \quad (1)$$

donde $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n)$ es el vector de tasas de retención.

La ganancia esperada será:

$$E[Z(\bar{\alpha})] = \sum_{i=1}^n P_i - \sum_{i=1}^n \rho_i^R(1 - \alpha_i)ES_i - \sum_{i=1}^n ES_i, \quad (2)$$

y la varianza de la ganancia será:

$$Var[Z(\bar{\alpha})] = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 Var(S_i). \quad (3)$$

Si el asegurador determina una ganancia esperada igual a la constante g , la prima de reaseguro quedará determinada mediante la siguiente expresión:

$$\sum_{i=1}^n \rho_i^R (1 - \alpha_i) ES_i = -g + \sum_{i=1}^n P_i - \sum_{i=1}^n ES_i.$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones anteriores se propone utilizar el método de *de Finetti* que permite determinar el vector $\bar{\alpha}$ de tasas de retención de manera de minimizar la varianza de la ganancia del asegurador dado un nivel fijo g de ganancia esperada. Es decir, se resolverá el siguiente problema de minimización:

$$\min_{\bar{\alpha}} \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 Var(S_i) \quad (4)$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^n \rho_i^R (1 - \alpha_i) ES_i = -g + \sum_{i=1}^n P_i - \sum_{i=1}^n ES_i \quad (5)$$

$$\alpha_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n$$

$$-\alpha_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, n$$

Este método de minimización, propuesto por *Bruno de Finetti* en su trabajo titulado “*Il problema dei pieni*” (de Finetti, 1940) es precursor del famoso trabajo de Harry Markowitz (1952) (Premio Nobel en Economía, 1990) llamado *Portfolio Selection* en el que se utiliza el enfoque de media-varianza para resolver el problema de selección de la cartera (Pressacco, 1986).

2.4. Optimización

Para resolver el problema planteado es necesario introducir los conceptos de *Función de Lagrange* y condiciones de *Karush-Kuhn -Tucker*.

Considerando que la varianza de la ganancia del asegurador es una función convexa -por ser una simple suma de funciones cuadráticas-, que la primer restricción es una suma de funciones lineales por lo tanto también es convexa, así como las dos últimas restricciones son funciones lineales y por lo tanto convexas, el problema anterior se convierte en un problema de optimización convexa.

Para resolver el problema de minimización se utilizarán las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) ya que en este caso son necesarias y suficientes para encontrar un valor óptimo del vector $\bar{\alpha}$ de tasas de retención.

Previamente se deberá obtener la función de Lagrange ya que esta será necesaria para plantear luego las condiciones KKT:

$$L(\bar{\alpha}, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \lambda) = \sum_{i=1}^n [\alpha_i^2 \text{Var}(S_i) + \mu_{1i}(-\alpha_i) + \mu_{2i}(\alpha_i - 1)] \\ + \lambda \left(\sum_{i=1}^n \rho_i^R (1 - \alpha_i) ES_i + g - \sum_{i=1}^n P_i + \sum_{i=1}^n ES_i \right).$$

Las condiciones de KKT para este problema serán:

Condición estacionaria:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}} L(\bar{\alpha}, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \lambda) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}} L(\bar{\alpha}, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \lambda) = \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}} \left[\sum_{i=1}^n [\alpha_i^2 \text{Var}(S_i) + \mu_{1i}(-\alpha_i) + \mu_{2i}(\alpha_i - 1)] \right. \\ \left. + \lambda \left(\sum_{i=1}^n \rho_i^R (1 - \alpha_i) ES_i + g - \sum_{i=1}^n P_i + \sum_{i=1}^n ES_i \right) \right] = 0$$

$$2\alpha_i \text{Var} S_i - \mu_{1i} + \mu_{2i} - \lambda \rho_i^R ES_i = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

Condiciones de factibilidad

$$\sum_{i=1}^n \rho_i^R (1 - \alpha_i) ES_i = -g + \sum_{i=1}^n P_i - \sum_{i=1}^n ES_i \\ -\alpha_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, n \\ \alpha_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n$$

Condiciones de holgura:

$$\mu_{1i} \alpha_i = 0 \\ \mu_{2i} (\alpha_i - 1) = 0$$

Condiciones de signo:

$$\mu_{1i} \geq 0 \\ \mu_{2i} \geq 0$$

Finalmente, aplicando las condiciones de KKT, se puede concluir que, para cualquier elección de λ , se cumple que

$$\sum_{i=1}^n P_i - \sum_{i=1}^n ES_i - \sum_{i|\rho_i^R > 0} \rho_i^R ES_i \leq g \leq \sum_{i=1}^n P_i - \sum_{i=1}^n ES_i - \sum_{i|\rho_i^R < 0} \rho_i^R ES_i \quad (6)$$

donde:

- $\sum_{i=1}^n P_i - \sum_{i=1}^n ES_i$ es el margen de ganancia del aseguradora antes de realizar cualquier operación con el reasegurador,
- $\sum_{i|\rho_i^R > 0} \rho_i^R ES_i$ es la máxima ganancia de la reaseguradora,
- $\sum_{i|\rho_i^R < 0} \rho_i^R ES_i$ es la máxima pérdida de la reaseguradora.

De esta forma se llega a que la solución óptima del problema de minimización planteado es la siguiente:

$$\alpha_i = \min \left(1, \max \left(0, \frac{\lambda \rho_i^R E(S_i)}{2Var(S_i)} \right) \right) \quad (7)$$

donde λ se obtiene reemplazando (7) en (5) siempre que $E[Z(\bar{\alpha})] = g$ cumpla la condición (6).

2.5. Distribuciones de Probabilidad

Para la aplicación práctica será necesario introducir distribuciones de probabilidad tanto para el tamaño relativo de los siniestros como para el costo agregado de los siniestros. La elección de estas distribuciones dependerá en primer lugar de las características particulares de la cartera y en segundo lugar de la experiencia previa que tenga la aseguradora para el tipo de seguros particular.

En el caso de la distribución del tamaño relativo de los siniestros se pueden utilizar distribuciones como Log Normal, Pareto, Transformada de Pareto y Weibull (Arónica, 2012), entre otras. Para el presente caso de estudio se utilizará la distribución MBBEFD propuesta por (Bernegger, 1997) y utilizada, entre otros, por (Lampaert y Walhin, 2005) y (Pirozzi, 2013), ya que permite modelar curvas de exposición al riesgo definidas en el intervalo acotado $[0, 1]$ y que están relacionadas con las características curvas utilizadas por la Swiss Re y Lloyd's of London.

En el caso del costo agregado de los siniestros las distribuciones que se proponen en la bibliografía de referencia son Poisson, Binomial Negativa y Gamma (Arónica, 2012), entre otras. En el presente trabajo se utilizará la distribución Gamma-Shifted propuesta por (Lampaert y Walhin, 2005).

2.5.1. Distribución MBBEFD para la exposición al riesgo

Las **Curvas de exposición al riesgo** permiten determinar directamente la tasa de retención en función del deducible. Para construirlas se parte de la distribución del cociente entre el tamaño del siniestro y la suma asegurada, al que llamaremos tamaño relativo del siniestro (X).

Para pasar de esta distribución a la curva de exposición se determina qué proporción de la prima debería retener el asegurador para lograr hacerse cargo del deducible d . Esta proporción corresponde a el cociente entre 1 menos el área bajo la curva a la izquierda de d y 1 menos el área total bajo la curva, es decir, la curva de exposición al riesgo se construye representando la función $G(d)$:

$$G(d) = \frac{\int_0^d (1 - F_X(x))dx}{\int_0^1 (1 - F_X(x))dx} = \frac{\int_0^d (1 - F_X(x))dx}{E(x)}.$$

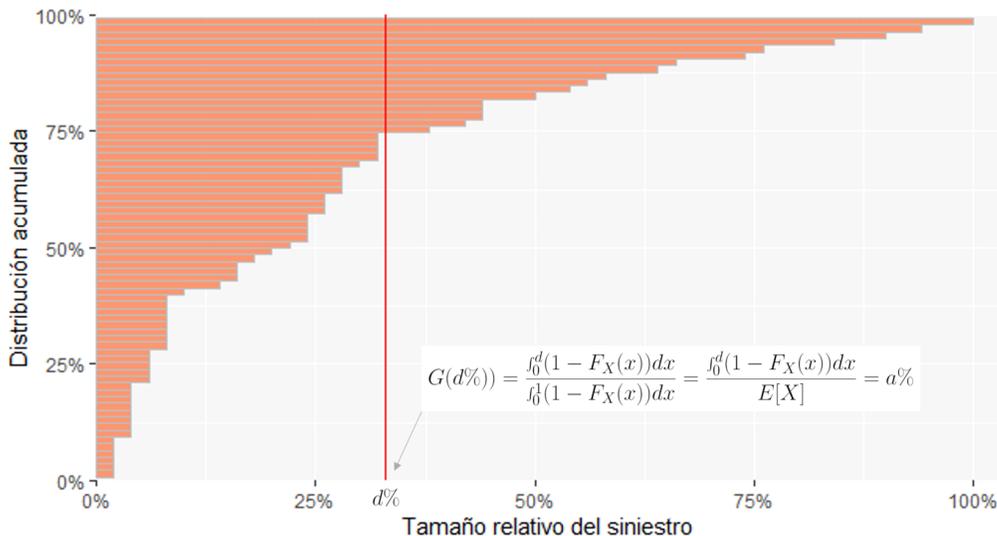


Figura 4: Distribución empírica del tamaño relativo del siniestro

Como $1 - F_X(x) \geq 0$ y $F'_X(x) = f_X(x) \geq 0$, las curvas de exposición al riesgo $G(d)$ tienen la particularidad de ser crecientes y cóncavas; pasan por los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$ y cuánto más cerca se encuentran de la recta $y = x$ más la distribución subyacente contiene siniestros de mayor magnitud, por el contrario, cuánto más alejadas se encuentran de ésta, la distribución subyacente contiene siniestros más pequeños.

Si se quisiera derivar la función de distribución a partir de la curva de exposición, se debe tener en cuenta la siguiente relación:

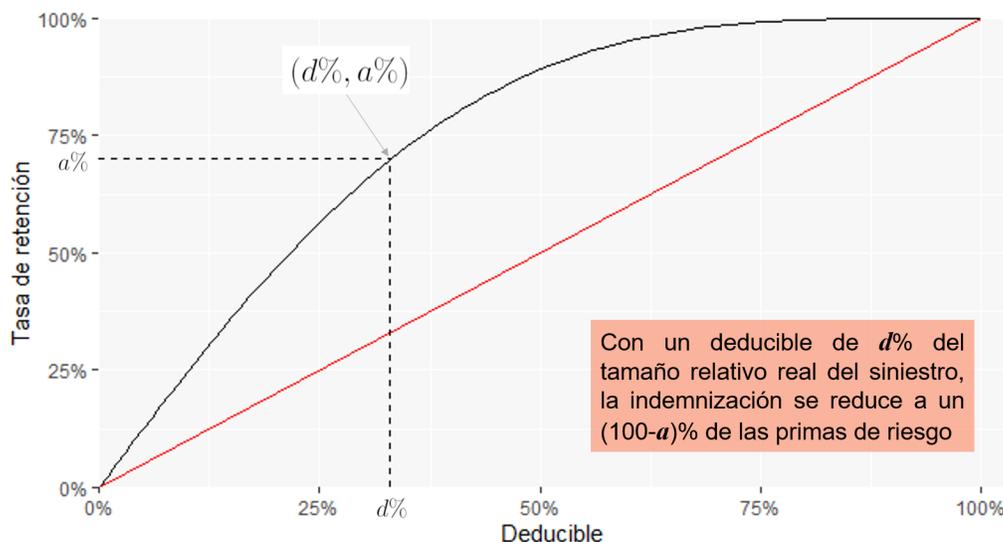


Figura 5: Curva de exposición al riesgo (*Deductible Credit Curve*)

$$G'(d) = \frac{1 - F(d)}{E(x)}$$

teniendo en cuenta que $F(0) = 0$ y $G'(0) = \frac{1}{E(x)}$ se obtiene que:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 1 - \frac{G'(x)}{G'(0)} & \text{si } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

De esta manera, se ha comprobado que la función de distribución de un riesgo y su curva de exposición son representaciones equivalentes.

2.5.2. Distribución MBBEFD para el tamaño relativo del siniestro

En el pasado, las curvas de exposición al riesgo se encontraban a menudo de forma gráfica o tabulada, pero esto llevaba la dificultad de no siempre encontrar una adecuada para la cartera a la cual se querían aplicar.

Para solucionar este inconveniente, (Bernegger, 1997) propuso utilizar una subclase de la distribución MBBEFD (*Maxwell-Boltzmann, Bose-Einstein, Fermi-Dirac*) para modelar el tamaño relativo del siniestro.

Inicialmente, Bernegger define una clase de curvas de exposición $G_{b,g}(x)$ la cual cuenta con dos parámetros b y g y cuya función de distribución asociada está dada por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x < 1, g = 1 \text{ o } b = 0 \\ 1 - \frac{1}{1+(g-1)x} & \text{si } x < 1, b = 1, g > 1 \\ 1 - b^x & \text{si } x < 1, bg = 1, g > 1 \\ 1 - \frac{1-b}{(g-1)b^{1-x}+(1-bg)} & \text{si } x < 1, b > 0, b \neq 1, bg \neq 1, g > 1 \end{cases}$$

y su función de densidad es:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } g = 1 \text{ o } b = 0 \\ \frac{g-1}{(1+(g-1)x)^2} & \text{si } b = 1, g > 1 \\ -\ln(b) \cdot b^x & \text{si } bg = 1, g > 1 \\ \frac{(b-1)(g-1)\ln(b)b^{1-x}}{((g-1)b^{1-x}+(1-bg))^2} & \text{si } b > 0, b \neq 1, bg \neq 1, g > 1 \end{cases}$$

Posteriormente, el autor utiliza una subclase de esta distribución para modelar las curvas de exposición al riesgo. Esta subclase de distribuciones cuenta con un único parámetro c y es a menudo utilizada como una aproximación para las curvas de exposición de compañías como Swiss Re y Lloyd's of London.

Las curvas de exposición asociadas a la distribución MBBEFD con único parámetro están definidas de la siguiente manera:

$$G_c(x) = G_{b_c, g_c}(x)$$

con

$$b_c = b(c) = e^{3,1-0,15(1+c)c}$$

$$g_c = g(c) = e^{(0,78+0,12c)c}$$

En particular, el valor esperado de la distribución del tamaño relativo del reclamo podrá calcularse de la siguiente forma:

$$E(X) = \frac{\ln(gb)(1-b)}{\ln(b)(1-gb)}.$$

A continuación se presentan los gráficos correspondientes a las curvas de exposición, sus distribuciones y densidades asociadas para algunos valores relevantes del parámetro c ⁴. En particular, los parámetros $c = 2, 3$, y 4 son asociados a las reconocidas curvas de exposición Y_2, Y_3 y Y_4 de la Swiss Re, y cuando $c = 5$ la curva coincide con la utilizada por Lloyds of London para riesgo industrial.

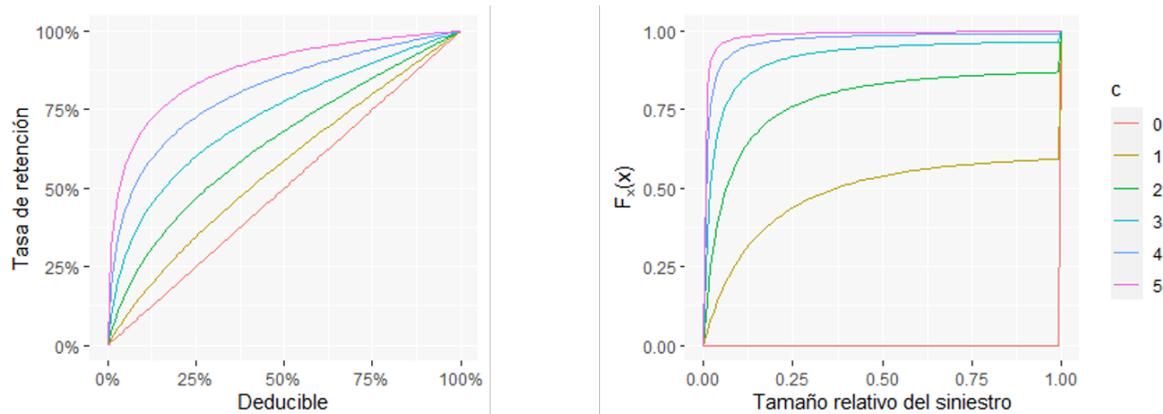


Figura 6: Ejemplos de curvas de exposición al riesgo y sus respectivas distribuciones MBBEFD en función del parámetro c

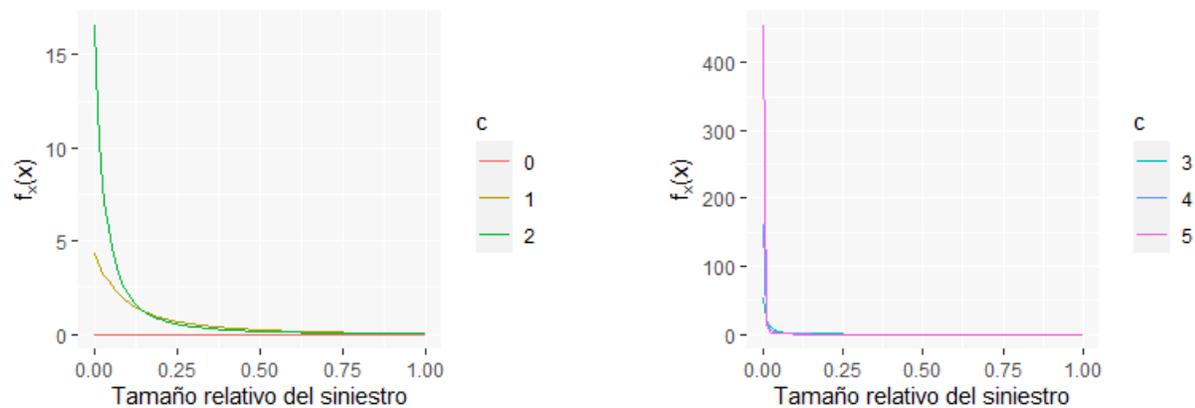


Figura 7: Densidades MBBEFD asociadas a las curvas de exposición presentadas en la figura 6

En la figura 6 se puede apreciar que el valor del parámetro c afecta directamente en la concavidad de la curva de exposición. La curva asociada al parámetro $c = 0$ es una función lineal del deducible, esto quiere decir que los riesgos de la cartera asociada a esa

⁴Los gráficos presentados en las figuras 6, 7 y 8 fueron creados utilizando de manera explícita las expresiones de las funciones $G(x)$, $F_X(x)$ y $f_X(x)$ correspondientes a la clase de distribuciones MBBEFD a un único parámetro c (Bernegger, 1997), no obstante las mismas visualizaciones se pueden crear utilizando la librería `mbbefd` (Dutang y Spedicato, 2021) disponible en R.

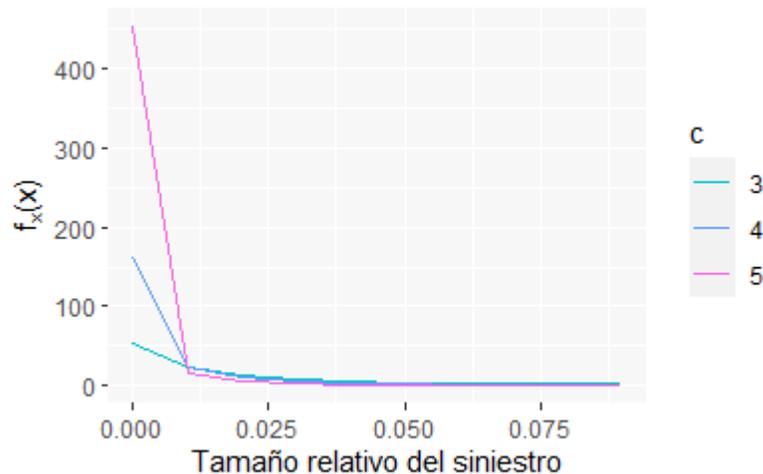


Figura 8: Zoom para densidades MBBEFD asociadas a las curvas de exposición presentadas en la figura 7 - Parámetros $c=3,4,5$, valores del tamaño relativo del siniestro menores que 10%

curva de exposición provoca pérdidas equivalentes a la totalidad de las sumas aseguradas. A medida que aumenta el valor de c aumenta la concavidad de la curva y, tal como se mencionó anteriormente, las curvas con mayor concavidad implican carteras con pólizas menos riesgosas, o pólizas con menor tamaño relativo del siniestro.

2.5.3. Distribución Gamma Shifted para el costo agregado de los siniestros.

Para una cartera con N riesgos divididos en J clases, cada una de estas conteniendo n_j riesgos, el cálculo del costo agregado de los siniestros utilizando el modelo de riesgo individual tendrá la siguiente forma general:

$$S = \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{n_j} D_{ij} L_{ij} = \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{n_j} S_{ij}$$

donde:

- D_{ij} es la variable indicadora del siniestro, es decir

$$D_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si hay reclamo en la póliza } j \\ 0 & \text{si no hay reclamo en la póliza } j \end{cases}$$

con $P(D_{ij} = 1) = P(D_j = 1) = q_j$.

- $L_{ij} = SC_{ij} \cdot X_{ij}$ es el monto del daño de la póliza i en la clase de riesgo j , siendo SC_{ij} la sumas de capitales asegurados.

- S_{ij} es la pérdida asociada a la póliza i de la clase j .

Para el presente trabajo se utilizará la distribución Gamma Shifted como una aproximación paramétrica del costo agregado de los siniestros, de manera similar al trabajo realizado por Lampaert y Walhin (2005). Mediante esta distribución se reproducirán los primeros momentos de la distribución original.

La distribución Gamma Shifted (S) está definida según la fórmula: $S \approx Z + x_0$ donde $Z \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$, es decir

$$f_Z(x) = \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)} \quad \text{para } x > 0$$

$$F_Z(x) = \int_0^x f_Z(t) dt$$

donde $\Gamma(x)$ es la función Gamma.

Los primeros tres momentos centrados de esta distribución están dados por:

$$\mu = \sum_{j=1}^J [q_j EX_j] \sum_{i=1}^{n_j} SC_{ij}$$

$$\mu_2 = \sum_{j=1}^J [q_j \text{Var} X_j + q_j(1 - q_j)(EX_j)^2] \sum_{i=1}^{n_j} SC_{ij}^2$$

$$\mu_3 = \sum_{j=1}^J [q_j EX_j^3 - 3q_j^2 EX_j EX_j^2 + 2q_j^3 (EX_j)^3] \sum_{i=1}^{n_j} SC_{ij}^3$$

de los cuales se puede derivar la esperanza μ , el desvío σ , el coeficiente de variación $CV = \frac{\sigma}{\mu}$ y el índice de asimetría $\gamma = \frac{(S-\mu)^3}{\sigma^3}$.

3. Aplicación a los seguros contra incendio

El objetivo principal del presente trabajo es determinar el tipo de reaseguro óptimo para una cartera de pólizas de seguro contra incendio. Los análisis se realizaron usando el entorno de programación R (R Core Team, 2022) y las librerías `tidyverse` (Wickham *et al.*, 2019), `mbbfd` (Dutang y Spedicato, 2021), `gridExtra` (Auguie y Antonov, 2017).

Para ello se aplicarán los resultados vistos anteriormente a una cartera generada con las características específicas de un conjunto de pólizas de seguros nacionales.

Esta cartera cuenta con 35137 pólizas y está dividida en 3 clases de riesgo:

- $j = 1$ Hogares (HOGTOT+INCLEY+INCVIV)
- $j = 2$ Propiedades Horizontales (INCPH)
- $j = 3$ Empresas (INCEMP+CCOMVT)

En la siguiente Tabla se muestra la información sobre el capital asegurado para la cartera:

Tabla 1: Características de la distribución de las sumas aseguradas de la cartera utilizada para el caso de estudio

Clase j	n_j	SC_j	$\mu_j(SC)$	$\sigma_j(SC)$	q_{ij}
1	24348	2262337452	92917	82139	0.014
2	1782	1072206048	601687	623040	0.020
3	9007	904869014	100463	105147	0.021

donde:

- n_j es la cantidad de pólizas en la clase j
- SC_j es la suma de capitales asegurados para la clase j
- $\mu_j(SC)$ es la media de la suma de capitales asegurados para la clase j
- $\sigma_j(SC)$ es el desvío de la suma de capitales asegurados para la clase j
- q_{ij} es la frecuencia del siniestro para la póliza i en la clase j

Además, se definen las siguientes variables aleatorias:

- X_{ij} severidad o tamaño relativo del siniestro para la póliza i en la clase j
- $L_{ij} = SC_{ij} \cdot X_{ij}$ monto del daño referido a un único siniestro

3.1. Cálculo de distribuciones para la cartera utilizada

Para iniciar el caso de estudio se supone que las variables $X_{i,j}$, que representan el tamaño relativo del siniestro de la póliza i en la clase j , son idénticamente distribuidas dentro de cada clase de riesgo, es decir:

$$X_{i,j} = X_j \text{ para } i \in \{1, 2, 3, \dots, n_j\} \text{ y } j \in \{1, 2, 3\}.$$

También se supone que la probabilidad de que se produzca un reclamo es la misma para todas las pólizas dentro su clase de riesgo:

$$q_{i,j} = q_j \text{ para } i \in \{1, 2, 3, \dots, n_j\} \text{ y } j \in \{1, 2, 3\}.$$

Como se adelantó en la sección anterior, para modelar el tamaño relativo del siniestro se utilizará la subclase de distribuciones MBBEFD a un único parámetro propuesta por Bernegger. Las características de esta distribución se encuentran en la Tabla 2, donde cada fila representa los parámetros asociados a cada una de las clases de riesgo consideradas en la cartera.

Tabla 2: Características de la distribución del tamaño relativo del siniestro $X_{i,j}$

Clase de riesgo (j)	Frecuencia relativa del siniestro (q_j)	Parámetro de la distribución (c)
1	0.014	2
2	0.020	3
3	0.021	4

Los momentos simulados para la distribución del tamaño relativo del siniestro se encuentran en la Tabla 3.

Tabla 3: Primeros tres momentos de la distribución del tamaño relativo del siniestro $X_{i,j}$

Clase de riesgo (j)	$E(X_j)$	$E(X_j^2)$	$E(X_j^3)$	$Var(X_j)$
1	0.2278	0.1628	0.1445	0.1130
2	0.0932	0.0485	0.0432	0.0434
3	0.0326	0.0115	0.0096	0.0100

De esta manera, se puede apreciar que si bien en la Tabla 2 la primera clase de riesgo, que corresponde a pólizas contra incendio en hogares, tiene la frecuencia relativa más baja entre las tres clases de riesgo que se están considerando, esta clase es la que tiene un valor esperado del tamaño relativo del siniestro más grande. Por otro lado, la clase de riesgo 3, correspondiente a pólizas de incendio en empresas, tiene la frecuencia relativa más alta y el valor esperado del tamaño relativo del siniestro más pequeño.

Luego, tal como se adelantó en el capítulo anterior, para el costo agregado de los siniestros S se utiliza la distribución *Gamma Shifted* y se reproducen su esperanza μ , desvío standard σ , coeficiente de variación CV e índice de asimetría γ , suponiendo primero una única clase de riesgo para toda la cartera (Tabla 4) y luego considerando las tres clases de riesgo por separado (Tabla 5).

Tabla 4: Características de la distribución del costo agregado de los siniestros S considerando una única clase de riesgo para toda la cartera

μ	9871529
σ	1506331
CV	0.1526
γ	0.6419

Tabla 5: Características de la distribución del costo agregado de los siniestros S considerando una cartera dividida en 3 clases de riesgo

	Clase 1	Clase 2	Clase 3
μ	7316790	1949385	605354
σ	934130	1163386	207287
CV	0.1277	0.5968	0.3424
γ	0.2264	1.2689	1.2749

4. Resultados

4.1. Respecto a las particularidades de la aplicación

Uno de los objetivos fundamentales de la práctica del reaseguro, es la disminución de la probabilidad de ruina mediante la reducción en la variabilidad de los resultados. La determinación de la prima, ya sea de seguro o de reaseguro es otra de las prácticas que contribuye a disminuir la probabilidad de ruina.

La prima pura por sí misma, definida como la esperanza de la siniestralidad, protege a la empresa únicamente frente a la siniestralidad promedio, y la deja indefensa frente a las desviaciones excesivas e imprevistas. Para ello la prima recargada, definida como la prima pura más una carga de seguridad, ofrece como medio para proteger a la empresa frente a las oscilaciones de la siniestralidad.

En el presente estudio se diferenciarán tres posibles casos para la determinación de la carga de seguridad de las primas de seguro y reaseguro. En el primer caso la carga de la aseguradora será $\rho = 7\%$ y la de la reaseguradora será $\rho^R = 10\%$. En el segundo caso tanto la carga de la aseguradora como la de la reaseguradora se tomarán iguales, siendo

éstas $\rho = \rho^R = 7\%$. Finalmente, en el tercer caso la carga de la aseguradora será $\rho = 10\%$ y la de la reaseguradora será $\rho^R = 7\%$.

Tabla 6: Casos considerados para el análisis

	ρ	ρ^R
Caso 1	7%	10%
Caso 2	7%	7%
Caso 3	10%	7%

4.2. Respecto al procedimiento

Si bien los reaseguros de la forma no proporcional tienen especiales capacidades tanto en la reducción del riesgo, como en su eficiencia en general, también los reaseguros de la forma proporcional tienen sus propias ventajas, tales como la reducción del *moral hazard* o riesgo moral por parte de la compañía cedente, su simplicidad computacional es mayor y son más fáciles de valorar (Lampaert y Walhin, 2005).

Por ello, el presente estudio se centrará en las formas de reaseguro proporcional, en particular en contratos del tipo Cuota Parte y Excedente. Los resultados se analizarán para los tres casos mencionados en el apartado anterior, para cada uno de los siguientes tipos de reaseguro proporcional:

- Cuota parte global, con un única tasa de retención para toda la cartera.
- Cuota parte variable, con diferentes tasas de retención entre las clases de riesgo definidas, pero comunes dentro de ellas.
- Excedente global, con pleno de retención común a toda la cartera.
- Excedente con tabla de líneas, con líneas diferentes para cada clase de riesgo, pero comunes dentro de ellas.

Tal como se planteó al inicio de este trabajo, se busca encontrar la forma de reaseguro óptima que permita minimizar la varianza de la ganancia de la aseguradora directa, suponiendo una ganancia esperada determinada.

La ganancia de la cartera queda determinada por la siguiente ecuación:

$$Z(\bar{\alpha}) = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{n_j} ((1 + \rho)E(S_{ij}) - (1 + \rho^R)(1 - \alpha_{ij})E(S_{ij}) - \alpha_{ij}S_i) \quad (8)$$

y el problema de *de Finetti* queda determinado de la siguiente manera:

$$\min_{\alpha} Var[Z(\bar{\alpha})]$$

sujeto a la restricción $E[Z(\bar{\alpha})] = g$ y con solución

$$\alpha_{ij} = \min \left(1, \max \left(0, \frac{\lambda \rho^R E(S_{ij})}{2Var(S_{ij})} \right) \right) \quad \text{para } j = 1, 2, 3; \quad \text{e } i = 1, 2, \dots, n_j$$

Para la aplicación de la optimización, la ganancia esperada se calcula tomando un margen de ganancia de 5% sobre el total de las primas cobradas en ausencia del reaseguro, es decir

$$\begin{aligned} E[Z(\bar{\alpha})] &= 0,05 \cdot \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{n_j} P_{ij} \\ &= 0,05 \cdot \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{n_j} (1 + \rho) E S_{ij} \\ &\approx 500000. \end{aligned}$$

4.3. Resultados obtenidos para cuota parte global

Para el caso de un contrato de reaseguro del tipo cuota parte global las características de la cartera serán:

$$\begin{aligned} E(S^R) &= \alpha E(S) \\ Var(S^R) &= \alpha^2 Var(S) \\ \sigma(S^R) &= \alpha \sigma(S) \\ CV(S^R) &= CV(S) \\ \gamma(S^R) &= \gamma(S) \end{aligned}$$

Por lo tanto el reaseguro cuota parte global contribuirá a la disminución del valor esperado y la varianza del costo agregado de los siniestros, mientras que los coeficientes de variación y de asimetría se mantendrán en el mismo nivel que en ausencia del reaseguro.

Suponiendo una ganancia esperada igual a 500000, la tasa de retención óptima para la cartera será calculada utilizando la expresión:

$$\alpha = \min \left(1, \max \left(0, \frac{\lambda \rho^R E(S)}{2Var(S)} \right) \right)$$

donde la constante λ se obtiene mediante la sustitución de la expresión anterior en la expresión de la esperanza de la ganancia (ecuación 5),

$$\lambda = \frac{g - E(S)(\rho - \rho^R)}{\frac{(\rho^R E(S))^2}{2\text{Var}(S)}}$$

y la tasa de retención finalmente toma la siguiente forma general

$$\alpha = \min \left(1, \max \left(0, 1 - \frac{\rho E(S) - 500000}{\rho^R E(S)} \right) \right).$$

El resultado del reaseguro cuota parte global para los tres casos propuestos se ve resumido en la siguiente Tabla:

Tabla 7: Resultados obtenidos para el reaseguro cuota parte global

	Caso 1	Caso 2	Caso 3
α	0.81	0.72	0.30
$E(S^R)$	7961459	7142857	2912202
$\sigma(S^R)$	1214867	1089953	444383
$CV(S^R)$	0.1526	0.1526	0.1526
$\gamma(S^R)$	0.6419	0.6419	0.6419

Según los resultados presentados en la Tabla 7, a medida que la carga de seguridad de la aseguradora sube y la de la reaseguradora baja, se puede apreciar que la tasa de retención baja, es decir, es menor el porcentaje de riesgo que debería retener la empresa aseguradora. Tal como se había anticipado, luego de aplicar un reaseguro cuota parte global se obtendrá una disminución proporcional tanto del costo agregado de los siniestros como de su desvío, pero se mantendrán los mismos niveles de coeficiente de variación e índice de asimetría. Este comportamiento particular del desvío del costo agregado de los siniestros se representa gráficamente en la figura 9. Desde ella se puede deducir que si la aseguradora deseara transferir una proporción x de riesgo a la reaseguradora, le bastará con determinar una tasa de retención global equivalente a $1 - x\%$.

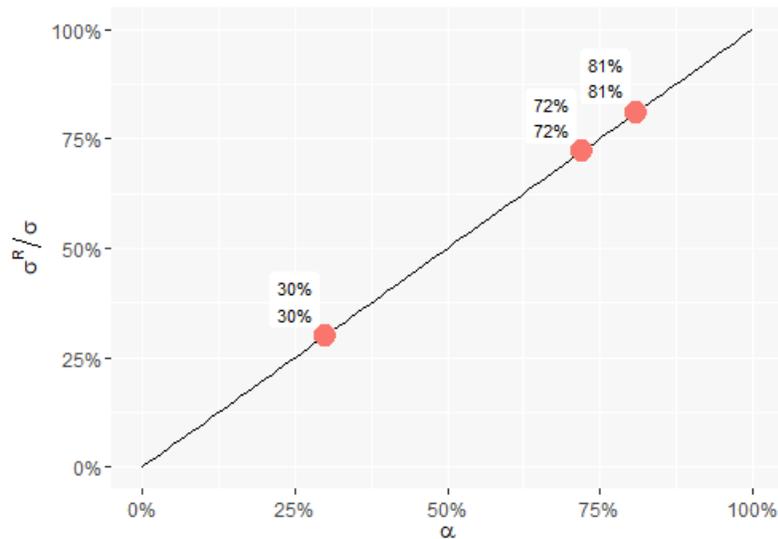


Figura 9: Aumento de la proporción de variabilidad retenida luego del reaseguro cuota parte global en función de la porción retenida de riesgo

4.4. Resultados obtenidos para cuota parte variable

En el caso del reaseguro cuota parte variable, es decir, si se supone que la tasa de retención varía en función de la clase de riesgo, definimos $S_j = \sum_{i=1}^{n_j} S_{ij}$ y las características de la cartera luego del reaseguro serán las siguientes:

$$E(S^R) = \sum_{j=1}^3 \alpha_j E(S_j)$$

$$Var(S^R) = \sum_{j=1}^3 \alpha_j^2 Var(S_j)$$

$$\sigma(S^R) = \sqrt{\sum_{j=1}^3 \alpha_j^2 Var(S_j)}$$

$$CV(S^R) \neq CV(S)$$

$$\gamma(S^R) \neq \gamma(S)$$

Considerando una ganancia esperada igual a 500000, las tasas de retención óptimas para cada clase de riesgo estarán dadas por la siguiente expresión:

$$\alpha_j = \min \left(1, \max \left(0, \frac{\lambda \rho^R \sum_{i=1}^{n_j} E(S_j)}{2 \sum_{i=1}^{n_j} Var(S_j)} \right) \right)$$

donde la constante λ se obtiene mediante la sustitución de la expresión anterior en la expresión de la esperanza de la ganancia (ecuación 5)

$$\lambda = \frac{g - \sum_{j=1}^3 E(S_j)(\rho - \rho^R)}{\frac{\sum_{j=1}^3 (\rho^R E S_j)^2}{2 \sum_{j=1}^3 Var(S_j)}}.$$

En la Tabla 8 se presentan las características del costo agregado de los siniestros luego de haber aplicado un reaseguro cuota parte variable.

Tabla 8: Resultados obtenidos para el reaseguro cuota parte variable

	Caso 1	Caso 2	Caso 3
α_1	0.92	0.82	0.34
α_2	0.16	0.14	0.06
α_3	1.00	1.00	0.56
$E(S^R)$	7632689	6910134	2912202
$\sigma(S^R)$	901480	813955	341578
$CV(S^R)$	0.1181	0.1178	0.1173
$\gamma(S^R)$	0.2213	0.2230	0.2364

En la Tabla 8 se visualiza como el resultado de la optimización para un reaseguro de este tipo logra una reducción más que proporcional en la varianza de la cartera. Al mismo tiempo, si se analiza el coeficiente de variación y el índice de asimetría, se encuentra que para este tipo de reaseguro la aplicación de las tasas óptimas de retención logra mejorar la homogeneidad de la cartera.

Es interesante apreciar que para el caso del reaseguro cuota parte variable, tal como en el caso del reaseguro cuota parte global, a medida que aumenta la carga de la aseguradora respecto a la de la reaseguradora, el método sugiere menores tasas de retención.

El procedimiento utilizado para llegar a las combinaciones de tasas de retención presentadas en la Tabla 8 es el sugerido por la bibliografía de referencia, sin embargo, en los casos en los que se requiere el truncamiento de la tasa correspondiente a alguna clase de riesgo por sobrepasar el valor máximo posible, estas combinaciones óptimas no permiten alcanzar la ganancia propuesta para el caso de estudio en cuestión.

Si bien la bibliografía de referencia no hace alusión a esta problemática, al analizar el ejemplo numérico propuesto por (Glineur y Walhin, 2006), se encuentra que en los casos

en los que alguna de las tasas de retención óptimas calculadas superan el valor máximo permitido, aplicar una redistribución de la retención sin tomar en cuenta las clases de riesgo para las cuales el valor óptimo requiere truncamiento permite llegar a la ganancia esperada propuesta inicialmente.

Siguiendo esta línea de acción, se decide recalculan las tasas de retención óptimas y las características de la cartera para los casos en los cuales alguno de los valores óptimos obtenidos superan el valor 1, es decir, para los casos 1 y 2. La siguiente Tabla presenta los resultados obtenidos mediante este proceso de redistribución de la retención óptima.

Tabla 9: Resultados obtenidos para el reaseguro cuota parte variable mediante la redistribución de la retención

	Caso 1	Caso 2	Caso 3⁵
α_1	0.96	0.85	0.34
α_2	0.17	0.15	0.06
α_3	1.00	1.00	0.56
$E(S^R)$	7961459	7142857	2912202
$\sigma(S^R)$	941473	842083	341578
$CV(S^R)$	0.1183	0.1179	0.1173
$\gamma(S^R)$	0.2209	0.2223	0.2364

Las tasas de retención óptimas obtenidas mediante el proceso de redistribución no parecen ser significativamente diferentes a las encontradas para el caso sin redistribución, sin embargo, éstas sí permiten llegar a la ganancia esperada de 500000 propuesta en el presente caso de estudio, a costas de un leve incremento en el desvío de la cartera luego del reaseguro, pero sin causar grandes cambios en el coeficiente de variación e índice de asimetría.

En las siguientes figuras se muestra el análisis numérico del coeficiente de variación para los tres casos analizados, luego de realizar la redistribución de la retención. En ellas se muestra como la combinación óptima de tasas de retención logra minimizar el coeficiente de variación de la cartera, entre todas las combinaciones que permiten llegar a un objetivo de ganancia esperada mayor o igual al planteado en el caso de estudio.

Para cada una de estas figuras se creó una grilla de valores con las posibles combinaciones de tasas de retención, manteniendo fijas dos de ellas y variando la tercera. Los puntos rojos representan todos aquellos valores del coeficiente de variación asociados a una ganancia esperada mayor o igual a 500000. Las líneas verdes verticales muestran la proporción que representa el valor esperado de los siniestros luego del reaseguro con respecto al valor

⁵Para el caso 3 no fue necesaria la redistribución ya que las tasas óptimas encontradas se encuentran en el rango de valores permitidos.

esperado de los siniestros en la cartera original para la combinación óptima de tasas de retención encontradas mediante el método de *de Finetti*.

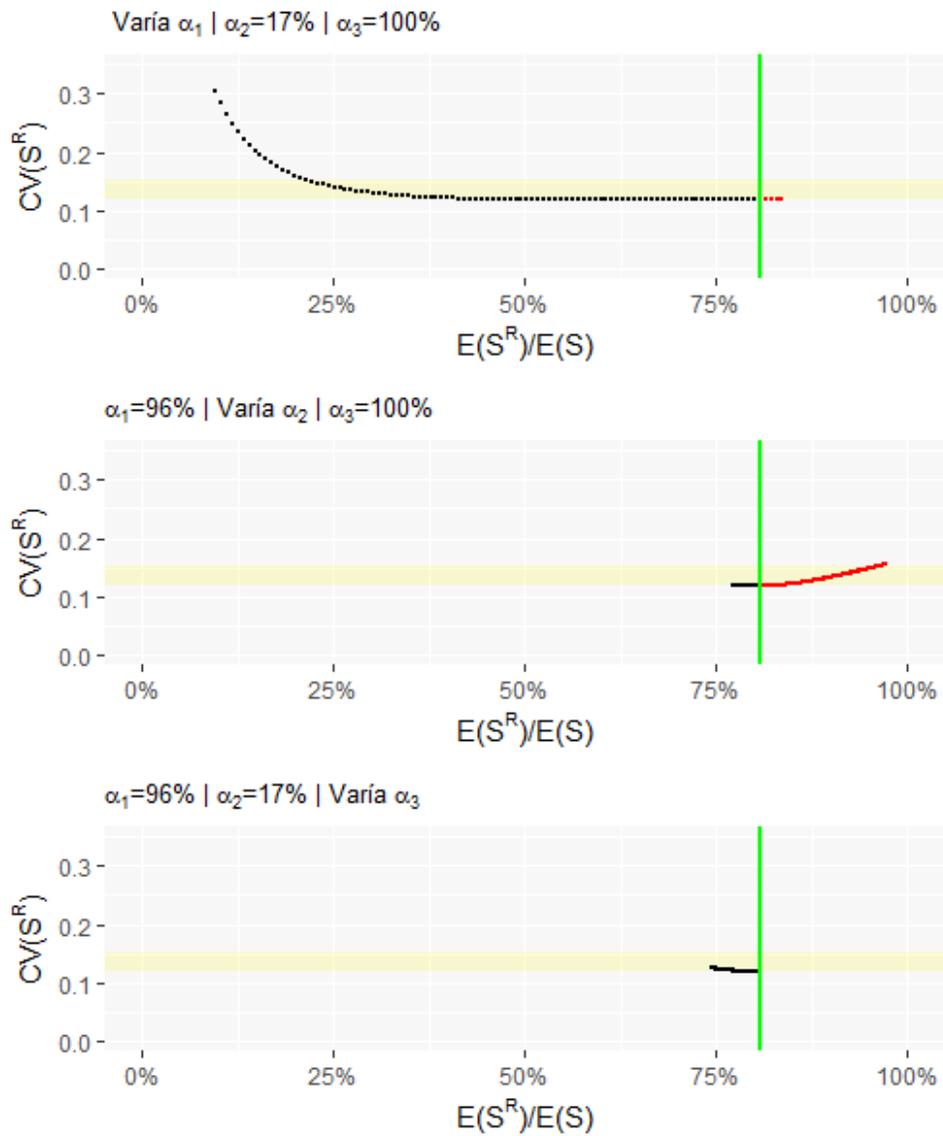


Figura 10: Coeficiente de variación - Caso 1: $\rho = 7\%$, $\rho^R = 10\%$

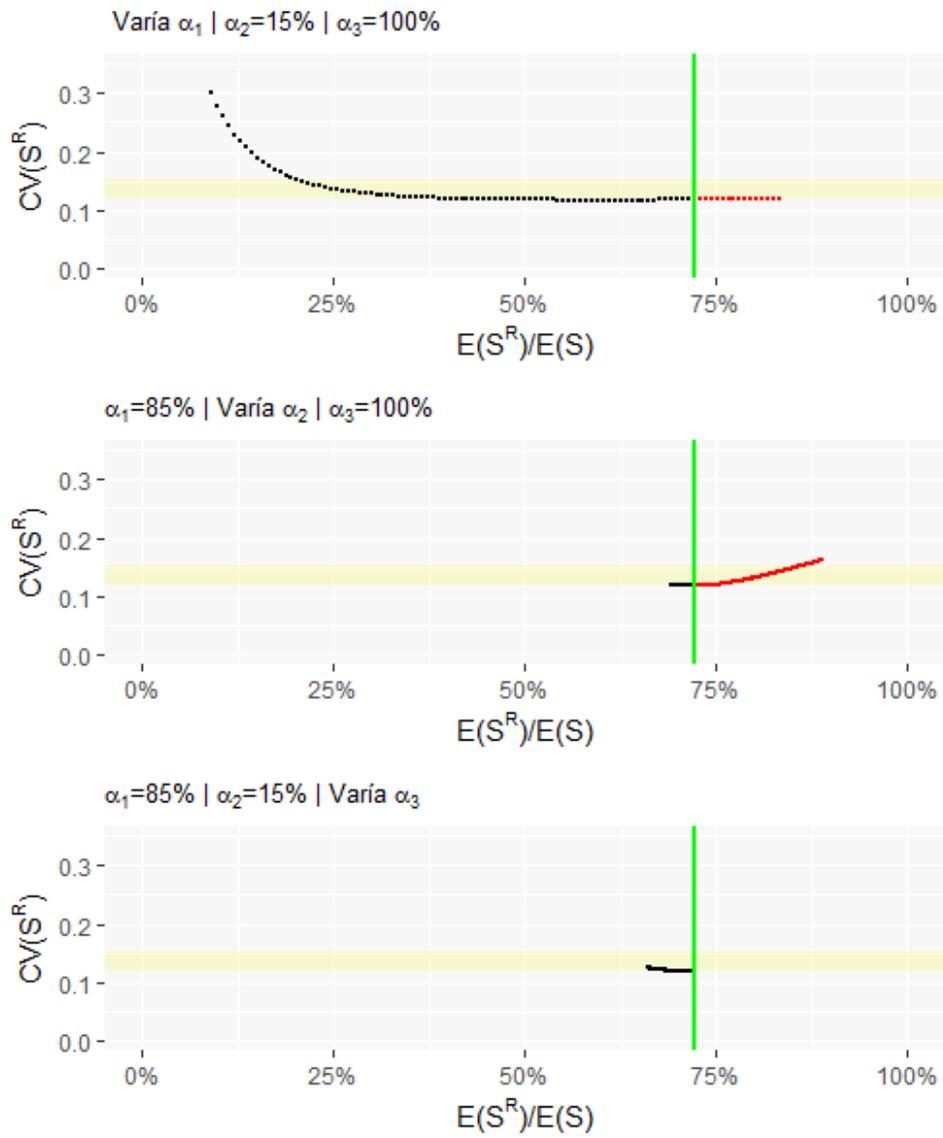


Figura 11: Coeficiente de variación - Caso 2: $\rho = 7\%$, $\rho^R = 7\%$

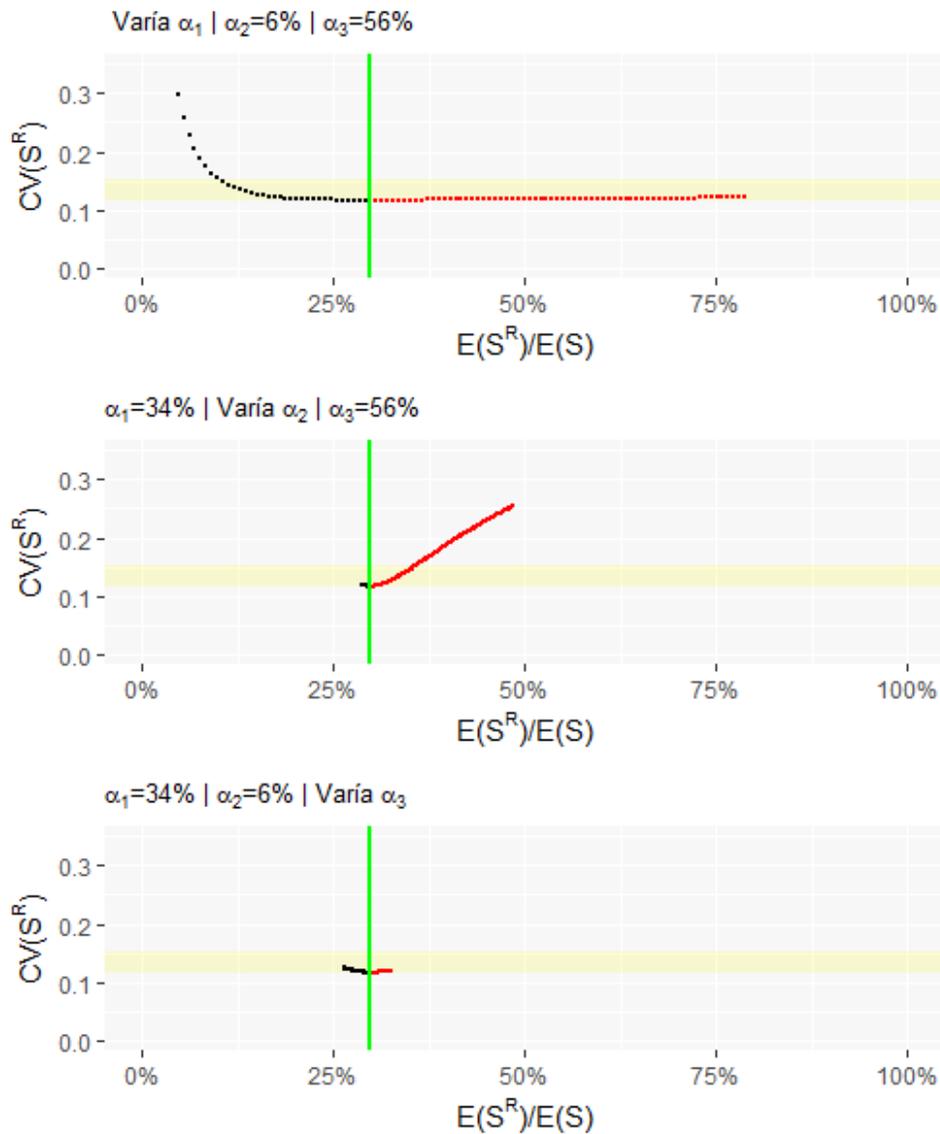


Figura 12: Coeficiente de variación - Caso 3: $\rho = 10\%$, $\rho^R = 7\%$

Se puede apreciar en los gráficos que al crecer el cargamento de seguridad de la aseguradora y disminuir el de la reaseguradora, la proporción de riesgo retenido por la aseguradora disminuye. Si bien existen valores de tasas de retención que producen un coeficiente de variación menor al que produce el óptimo, éstas no permiten alcanzar la ganancia esperada propuesta en el presente caso de estudio.

4.5. Resultados obtenidos para excedente global

El resultado del método de *de Finetti* en el caso de un reaseguro del tipo excedente puede ser obtenido de manera simple aplicando el mismo razonamiento que para el caso del reaseguro cuota parte, siempre teniendo en consideración que el valor buscado es un pleno de retención óptimo que representa el máximo importe que debería retener la aseguradora directa para minimizar la variabilidad de su cartera.

Suponiendo una ganancia esperada igual a 500000, la tasa de retención óptima para la cartera será calculada utilizando la expresión:

$$\alpha_{i,j} = \min \left(1, \max \left(0, \frac{R}{SC_{i,j}} \right) \right),$$

donde R representa el pleno de retención óptimo para la totalidad de la cartera y está determinado por la siguiente expresión

$$R = \frac{\lambda \rho^R E(S) SC}{2Var(S)}.$$

Dado que para la cartera utilizada en el presente caso de estudio no se conocen los montos asegurados de las pólizas individuales, la tasa de retención α quedará en la práctica determinada por

$$\alpha_j = \min \left(1, \max \left(0, \frac{R}{SC_j/n_j} \right) \right),$$

donde los valores de R y su λ respectivo tienen la siguiente forma general:

$$R = \frac{\lambda \sum_{j=1}^3 E(S_j) \frac{SC_j}{n_j}}{\rho^R \sum_{j=1}^3 Var(S_j)}, \quad \lambda = \frac{g - (1 + \rho) \sum_{j=1}^3 E(S_j) + (1 + \rho^R) \sum_{j=1}^3 E(S_j)}{\rho^{R^2} \sum_{j=1}^3 E(S_j) \frac{SC_j/n_j}{2Var(S_j)}}.$$

Las características de la cartera luego del reaseguro en función del pleno de retención serán las siguientes

$$E(S^R) = \sum_{j=1}^3 \left(\frac{R}{SC_j/n_j} \right) E(S)$$

$$Var(S^R) = \sum_{j=1}^3 \left(\frac{R}{SC_j/n_j} \right)^2 Var(S)$$

$$\sigma(S^R) = \sqrt{\sum_{j=1}^3 \left(\frac{R}{SC_j/n_j} \right)^2 Var(S)}$$

$$CV(S^R) \neq CV(S)$$

$$\gamma(S^R) \neq \gamma(S)$$

El resultado del reaseguro por excedente global para los tres casos propuestos se ve resumido en la siguiente Tabla:

Tabla 10: Resultados obtenidos para el reaseguro excedente

	Caso 1	Caso 2	Caso 3
R	90459.87	81158.74	33089.09
$E(S^R)$	7961459	7142857	2912202
$\sigma(S^R)$	944716	847579	345565
$CV(S^R)$	0.1187	0.1187	0.1187
$\gamma(S^R)$	0.2198	0.2198	0.2198

Por lo tanto, la aplicación de un reaseguro excedente global provoca en la cartera una reducción proporcional de la variabilidad y una mayor homogeneidad en la cartera, con un coeficiente de variación e índice de asimetría menores que los encontrados para la cartera sin reasegurar.

Según los resultados de la Tabla 10, en la comparación de casos se encuentra que el pleno de retención es menor a medida que la carga de la reaseguradora baja y la de la aseguradora sube, tal como se encontró para los casos de reaseguro cuota parte.

4.6. Resultados obtenidos para excedente con tabla de líneas

En el caso del reaseguro excedente con tabla de líneas, es decir, si se considera un pleno de retención diferente por clase de riesgo, las características de la cartera luego del reaseguro serán las siguientes:

$$E(S^R) = \sum_{j=1}^3 \left(\frac{R_j}{SC_j/n_j} \right) E(S)$$

$$Var(S^R) = \sum_{j=1}^3 \left(\frac{R_j}{SC_j/n_j} \right)^2 Var(S)$$

$$\sigma(S^R) = \sqrt{\sum_{j=1}^3 \left(\frac{R_j}{SC_j/n_j} \right)^2 Var(S)}$$

$$CV(S^R) \neq CV(S)$$

$$\gamma(S^R) \neq \gamma(S)$$

donde el pleno de retención para cada clase de riesgo está determinado de la siguiente forma:

$$R_j = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} \lambda \rho^R E S_i(SC_{ij})}{2 \sum_{i=1}^{n_j} Var(S_i)}$$

que se puede reescribir en función de las variables aleatorias D_{ij} y X_{ij} como:

$$R_j = \frac{\lambda}{2} \rho^R \frac{q_j E X_j}{q_j E X_j^2 - (q_j E X_j)^2}$$

y la constante λ tendrá la siguiente forma

$$\lambda = \frac{g - (\rho_{ij} - \rho^R) \sum_{j=1}^3 q_j E X_j SC_j}{\sum_{j=1}^3 \rho^{R^2} \frac{(E X_j)^2}{q_j E X_j^2 - (q_j E X_j)^2} n_j}.$$

Al calcular las tasas de retención asociadas para las líneas presentadas en la Tabla 11 se encuentra que para los casos 1 y 2 éstas sobrepasan el valor máximo permitido, haciendo necesario el truncamiento en el valor 1. Por consiguiente, estas tasas de retención no permiten generar la ganancia propuesta en el presente trabajo.

Tabla 11: Resultados obtenidos para el reaseguro excedente con tabla de líneas

	Caso 1	Caso 2	Caso 3
R_1	83465.11	74883.19	30530.49
R_2	114614.45	102829.73	41924.53
R_3	168882.69	151518.09	61775.18
$E(S^R)$	7549186	6835218	2912202
$\sigma(S^R)$	1041452	805761	342091
$CV(S^R)$	0.1380	0.1179	0.1175
$\gamma(S^R)$	0.1407	0.2254	0.2463

Para corregir estos plenos encontrados por el método de *de Finetti*, se decide realizar la misma redistribución de la retención realizada en el caso del reaseguro cuota parte variable. En la siguiente Tabla se presentan los resultados para surplus con tabla de líneas luego de la redistribución.

Tabla 12: Resultados obtenidos para el reaseguro excedente con tabla de líneas con redistribución de la retención

	Caso 1	Caso 2	Caso 3⁶
R_1	89729.71	79744.41	30530.49
R_2	89602.41	79631.28	41925.53
R_3	168882.69	151518.09	61775.18
$E(S^R)$	7961459	7142857	2912202
$\sigma(S^R)$	1042684	985387	342091
$CV(S^R)$	0.1310	0.1380	0.1175
$\gamma(S^R)$	0.1624	0.1386	0.2463

Tal como en el caso cuota parte variable, la redistribución provoca plenos de retención que no son significativamente diferentes a los encontrados anteriormente, y a costas de un mínimo incremento de la varianza y el desvío permiten generar la ganancia deseada.

4.7. Comparación de resultados

Al analizar y comparar los resultados obtenidos en cada uno de los tipos de reaseguro analizados previamente, se observan algunas diferencias en las características de la cartera luego de la aplicación.

⁶Para el caso 3 no fue necesaria la redistribución ya que las tasas óptimas correspondientes a los plenos de retención encontrados se encuentran en el rango de valores permitidos.

En el caso de los reaseguros cuota parte, se encuentra que en el caso variable se generan tasas óptimas que permiten no solo disminuir la variabilidad de la cartera luego del reaseguro, sino que también se logra mejor homogeneidad y simetría con coeficientes de variación e índices de asimetría menores que los encontrados en el caso cuota parte global. Por otro lado, para los reaseguros por excedente se encuentra que en el reaseguro global para los casos 1 y 2 el desvío y el coeficiente de variación son menores que para el reaseguro con tabla de líneas pero el índice de asimetría tiene un comportamiento inverso. En cambio, para el caso 3 tanto el desvío como el coeficiente de variación son menores en el reaseguro con tabla de líneas, y también en este caso el índice de asimetría tiene un comportamiento inverso.

En la comparación de los casos globales, se encuentra que el reaseguro excedente global no solo logra una mayor disminución en el desvío de la cartera luego del reaseguro con respecto al reaseguro cuota parte global, sino que también logra mejor homogeneidad y simetría en la cartera luego de haber aplicado el reaseguro.

En relación a los tipos de reaseguro cuota parte variable y excedente por tabla de líneas, los resultados indican que el primero provoca mayor disminución en la variabilidad de la cartera en comparación con el segundo. Sin perjuicio de lo anterior, para los casos en los que el cargamento de seguridad de la aseguradora es menor o igual al cargamento de la reaseguradora, es decir para los casos 1 y 2, el contrato excedente con tabla de líneas genera una mayor simetría en la cartera luego del reaseguro que la encontrada para cuota parte variable.

5. Conclusiones

Mediante la técnica de optimización convexa propuesta por *de Finetti* se logra una expresión matemática que permite encontrar de manera sencilla una combinación óptima de tasas (o plenos) de retención que logran minimizar la variación de la ganancia que la empresa aseguradora se propone obtener, sujeto a un nivel fijo de ganancia esperada. Cuando las tasas de retención óptimas obtenidas se encuentran fuera del rango permitido el procedimiento requiere un truncamiento de las mismas.

Al analizar en detalle el presente caso de estudio se encuentra que la ganancia esperada en los casos que se debe realizar el truncamiento mencionado es menor a la que se quiere obtener.

Dado que la bibliografía de referencia no menciona esta problemática, se analizaron otros casos prácticos propuestos por diferentes autores que permitieron llegar a la conclusión de que realizar una redistribución de la retención luego del truncamiento genera tasas de retención que sí logran el objetivo de ganancia propuesto, a costas de un leve incremento en la variabilidad de la misma.

Con respecto a la elección del tipo de reaseguro más conveniente para la empresa ase-

guradora, el análisis presentado para el presente caso de estudio muestra que no existe evidencia que permita afirmar de manera determinante la superioridad de un contrato de reaseguro cuota parte o excedente sobre el otro, sino que la elección dependerá de las características que la empresa requiera de su cartera luego de haber aplicado un contrato de reaseguro. Estos resultados coinciden con los obtenidos por Glineur y Walhin (2006) en su caso de estudio.

Por otra parte, se encontró que la relación entre las cargas de seguridad propuestas por la aseguradora y la reaseguradora tienen un efecto determinante en el nivel de retención óptimo: cuanto menor es la carga de la reaseguradora con respecto a la de la aseguradora el riesgo retenido será menor.

Los resultados que se obtienen sobre la cartera objeto de estudio luego del proceso de optimización para cada tipo de reaseguro no se deberían extrapolar a otros conjuntos o tipos de pólizas, ya que los mismos dependerán no solo de las características particulares de la cartera en cuestión sino también de otros factores como primas, cargamentos de seguridad, ganancia esperada, entre otras.

Finalmente, dado que en el presente trabajo, al igual que en el trabajo de Bruno de Finetti (1940), se realizó el supuesto de independencia para el tamaño relativo del siniestro y la frecuencia relativa de los mismos, una posible extensión podría realizarse basándose en el trabajo propuesto por Pressacco y Serafini (2007) en el que se extiende el método de *Bruno de Finetti* para el caso de una cartera con riesgos correlacionados.

Referencias

- Albrecher, H., Beirlant, J., y Teugels, J. (2017). *Reinsurance: Actuarial and Statistical Aspects*. Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley & Sons, Ltd.
- Arónica, E. (2012). *Teoría y práctica del seguro*. UNR Editora. Editorial de la Universidad Nacional de Rosario, Argentina.
- Auguie, B. y Antonov, A. (2017). *gridExtra: Miscellaneous Functions for ‘Grid’ Graphics*. R package version 2.3.
- Ayala, D. y Garcia Chabat, C. (2021). Formas de Reaseguro Óptimas. Trabajo final de grado de la Licenciatura en Estadística. Universidad de la República, Montevideo, Uruguay.
- Bernegger, S. (1997). The Swiss Re Exposure Curves and the MBBEFD Distribution Class. *ASTIN Bulletin*, 27(1):99–111.
- Canestraro, D. (2006). Metodologie di pricing per le riassicurazioni non proporzionali:

-
- il modello di Pareto. Tesis de grado de especialización en técnica actuarial de seguros contra daños, Università degli Studi di Firenze, Italia.
- Centeno, M. d. L. (2006). *Retention and Reinsurance Programmes*. John Wiley & Sons, Ltd.
- de Finetti, B. (1940). Il problema dei pieni. *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari*, 11:1–88.
- Dutang, C. y Spedicato, G. (2021). *mbbefd: Maxwell Boltzmann Bose Einstein Fermi Dirac Distribution and Destruction Rate Modelling*. R package version 0.8.10.
- Glineur, F. y Walhin, J. (2006). de Finetti's Retention Problem for Proportional Reinsurance Revisited. *Blätter DGVM*, 1(27):451–462.
- Holland, D. M. (2009). A brief history of reinsurance. *Society of Actuaries*, 65:4–29. Special Edition - Reinsurance News.
- Lampaert, I. y Walhin, J. (2005). On the optimality of proportional reinsurance. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2005(3):225–239.
- Pirozzi, C. (2013). Politiche Riassicurative Ottimali nelle Assicurazioni Danni. Tesis de grado en teoría del riesgo, Università degli Studi del Sannio, Italia.
- Pressacco, F. (1986). *Separation Theorems in Proportional Reinsurance*, pp. 209–215. Springer Netherlands, Dordrecht.
- Pressacco, F. y Serafini, P. (2007). The origins of the mean-variance approach in finance: revisiting de Finetti 65 years later. *Decisions in Economics and Finance*, 30(1):19–49.
- R Core Team (2022). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.
- Wickham, H., Averick, M., Bryan, J., Chang, W., McGowan, L. D., François, R., Grolemund, G., Hayes, A., Henry, L., Hester, J., Kuhn, M., Pedersen, T. L., Miller, E., Bache, S. M., Müller, K., Ooms, J., Robinson, D., Seidel, D. P., Spinu, V., Takahashi, K., Vaughan, D., Wilke, C., Woo, K., y Yutani, H. (2019). Welcome to the tidyverse. *Journal of Open Source Software*, 4(43):1686.

Instituto de Estadística

Serie Documentos de Trabajo



FACULTAD DE
CIENCIAS ECONÓMICAS
Y DE ADMINISTRACIÓN

IESTA 80

INSTITUTO
DE ESTADÍSTICA



UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

**Gonzalo Ramírez 1926, Piso 1, Oficina 23 - C.P. 11200 -
Montevideo, Uruguay
Teléfono: (598) 2410 2564
<https://iesta.fcea.udelar.edu.uy/>
Área Publicaciones**

1er semestre, 2022

Nº3/22