Simulaciones en R de Grafos Aleatorios que verifican el enunciado de un teorema.

Cecilia Alonso, Valentina Caldiroli y Renzo Matturro

Trabajo Final del curso Probabilidad II.

Instituto de Estadística - Facltad de Ciencias Económicas y Administración. Agosto 2022.

80 AÑOS
INSTITUTO DE ESTADÍSTICA

FCEA FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y DE ADMINISTRACIÓN

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

1. Introducción

El objetivo de este trabajo es estudiar de forma introductoria la noción de grafo aleatorio y conceptos vinculados, definir el modelo Erdos-Renyi y sus propiedades, así como también demostrar el Teorema 9 del libro *Modern Graph Theory* [1] y un teorema complementario. A su vez, se implementa una aplicación Shiny para realizar simulaciones del teorema indicado.

Resulta de gran interés poder analizar cómo se producen y que características tienen las redes que nos unen y nos rodean (se encuentran ejemplos de redes que conectan personas, instituciones, economías, infraestructuras, elementos de la naturaleza, etc), generalmente se representan en matemática de manera formal utilizando grafos [2].

2.Marco teórico

Grafo:
Es un par ordenado de conjuntos disjuntos $G = (V, E)$ donde $V = V(G)$ denota el conjunto de vértices y $E = E(G)$ el de aristas con una aplicación

$$\Phi : E \longrightarrow V \times V$$

que lleva cada elemento de E en un par de $V \times V$. Habitualmente se supone que $V \neq \emptyset$ y E son numerables. Si son finitos, diremos que G es finito [3].

Función de umbral (threshold function):
Una función de umbral para alguna propiedad en particular es una función t(n) tal que la propiedad se mantiene con una probabilidad que tiende a 1 cuando $p(n)/t(n) \to \infty$ y que tiende a 0 cuando $p(n)/t(n) \to \infty$, siendo p(n) la probabilidad de conexión entre dos nodos, para una cantidad n de nodos [4].

Modelo Erdos-Renyi
El modelo de grafos aleatorios de Erdos-Renyi está definido como un grafo puramente aleatorio que conecta un conjunto de n nodos entre sí, donde dos nodos, i y j, se conectan con probabilidad p $(0 < p < 1)$ y por ende no se comunican entre sí con probabilidad $1-p$, a su vez, esta conexión se da de manera independiente [4].

Una red que tenga m enlaces dentro de n nodos tiene una probabilidad de formarse bajo un proceso igual a:

$$p^m(1-p)^{\frac{n(n-1)}{2}-m}$$

4. Teoremas de interés

Teorema 9 [1]:
Sea $\omega(n) \to \infty$ y establecemos $p_\ell(n) = (\log n - \omega(n))/n$ y $p_u(n) = (\log n + \omega(n))/n$. Entonces casi seguramente (c.s.) $G_{p\ell}$ esta desconectado y G_{p_u} esta conectado. Por lo tanto, en el modelo Erdos-Renyi $\mathcal{G}(n,p)$, p_ℓ es una función de umbral inferior (ltf) y p_u es una función de umbral superior (utf) por la propiedad de estar conectadas.

Teorema 4.2.1 [4]:
Una función de umbral para la conectividad de la red aleatoria de Poisson es: $t(n) = log(n)/n$.

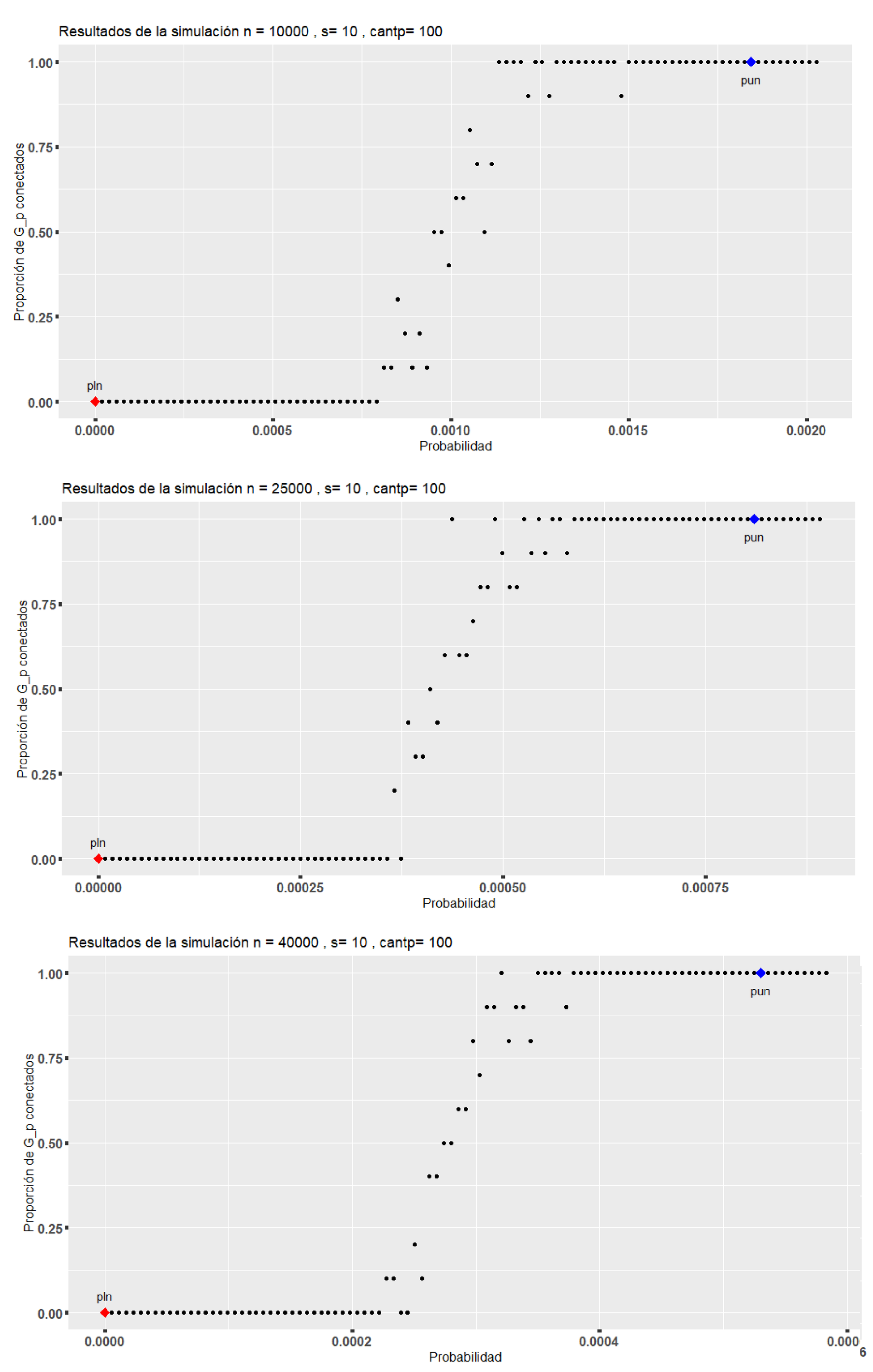
Si se utiliza en el modelo de Poisson, entonces el modelo está completamente especificado por $p(n)$. En ese caso, una función de umbral para alguna propiedad dada es una función $t(n)$ tal que la propiedad se cumple con una probabilidad cercana a 1 si $p(n)/t(n) \to \infty$, mientras que la propiedad se cumple con una probabilidad cercana a 0 si $p(n)/t(n) \to 0$. Así, el teorema muestra que si la probabilidad de un enlace es mayor que log(n)/n, entonces la red está conectada con una probabilidad que tiende a uno, mientras que si es menor que log(n)/n entonces la probabilidad de que no sea conexo tiende a uno.

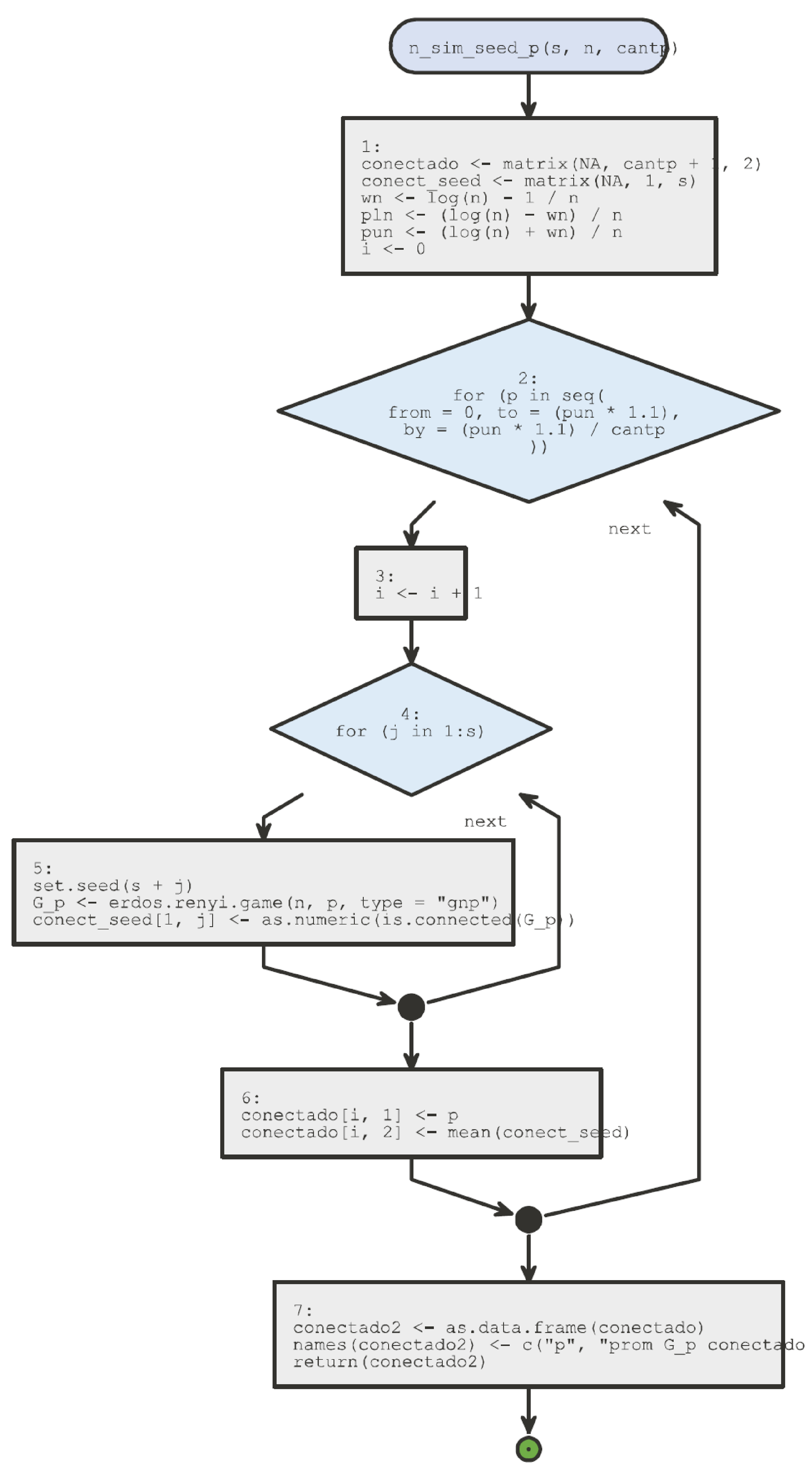
5. Simulaciones en R y desarrollo de una Shiny App.

Se realizaron simulaciones en R que verifican lo que enuncia el teorema [1], utilizando la función *erdos.renyi.game* del paquete *igraph* que permite simular grafos aleatorios clásicos de cualquier tipo [5][6]. A continuación se encuentran visualizaciones de dichas simulaciones.

A su vez, se elaboró una aplicación web usando la librería *shiny* en R, donde el usuario puede generar sus propias simulaciones a partir de la selección de valores de interés de los parámetros involucrados (a continuación se presenta un esquema de la función programada para las simulaciones). Para acceder al Shiny se puede escanear el siguiente código QR:

https://cinve.shinyapps.io/Trabajo_final_prob2/





6. Comentarios Finales

Destacamos el uso de la herramienta Shiny App para parametrizar y generar visualizaciones interactivas de las simulaciones, facilitando la comprensión y comunicación de los teoremas.

Por último, una conclusión profunda vinculada a los teoremas en los que se centra este trabajo: para mostrar que una red no está conectada, basta con mostrar que hay algunos nodos aislados.

7. Referencias

[1] B. Bollobas. *Modern Graph Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2013.

[2] E.D. Kolaczyk. *Statistical Analysis of Network Data*. Springer series in statistics. Springer New York, 2009.

[3] S. Herrero. Espacios de grafos y grafos aleatorios. 2020.

[4] Matthew O. Jackson. *Social and economic networks*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2008.

[5] Eric Kolaczyk and Gábor Csárdi. *Statistical Analysis of Network Data with R*. 01 2020.

[6] Douglas Luke. *A User's Guide to Network Analysis in R*. Springer Cham, 2015.