

La transformación de procesos en inferencia (Generalidades sobre la construcción de pruebas de ajuste consistentes y focalizadas para muestras simples, regresión y series de tiempo estacionarias)

Alejandra Cabaña*, Enrique M. Cabaña**

Primeras Jornadas Académicas de la Facultad de Ciencias
Económicas y de Administración, 14-15 de octubre de 2010

Resumen

α

Diversos procedimientos utilizados en la construcción de pruebas de ajuste consistentes y focalizadas tienen elementos comunes que caracterizan al método de las transformaciones de procesos.

El objeto de esta presentación es describir genéricamente y con mínimas consideraciones técnicas el contexto general al que se aplican las transformaciones de procesos, y dar cuenta del trabajo de un grupo integrado en parte por docentes de la Facultad de Ciencias Económicas y de Administración, a través de una lista de sus publicaciones, que incluyen como aplicaciones el diseño de pruebas de ajuste para muestras aleatorias simples, para modelos de regresión y para series cronológicas estacionarias.

Palabras clave. Transformaciones de procesos en inferencia, pruebas de ajuste, proceso empírico, residuos acumulados, regresión, modelos autorregresivos.

Clasificación AMS: 62G10, 62M10

*Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, Bellaterra, Barcelona, España.

**Área de Matemática, Departamento de Métodos Matemático-Cuantitativos, Facultad de Ciencias Económicas y de Administración, Universidad de la República, Montevideo, Uruguay.

1. Introducción

La línea de trabajo iniciada con la tesis doctoral de Alejandra Cabaña (Universidad Central de Venezuela, 1993), ha producido resultados con aportes de varios integrantes de la Universidad de la República, entre ellos, José Díaz y Jorge Graneri, vinculados con apoyo del Proyecto CONICYT 94/007 “Optimización de la potencia de pruebas de ajuste y comparación para muestras multivariantes” (1995-1997), Juan Kalemkerian y Marco Scavino, que lo hicieron en el marco del proyecto CSIC “Inferencia estadística basada en procesos empíricos y sus transformados” (1998), e Ignacio Álvarez, María Elisa Bertinat, Natalia DaSilva, Cecilia Hastings, y Darío Padula, por su participación en el Proyecto PDT/S/C/IF/63/053 (2007-2008), junto con Marco Scavino.

La vinculación de estos integrantes del grupo (que llamaremos abreviadamente GRUTPI -Grupo de Transformaciones de Procesos en Inferencia) no ha estado necesariamente limitada a su participación en las actividades de uno o varios de estos proyectos. En particular, las tesis de Maestría y de Doctorado de Juan Kalemkerian (PEDECIBA 1998 y 2006) y la de doctorado de Marco Scavino (Università degli Studi di Padova 1999) han tenido una fuerte vinculación con el trabajo del GRUTPI.

En esta presentación vamos a evadir en lo posible todo tipo de tecnicismos. Comenzaremos por situar los problemas a los que aplicamos las transformaciones de procesos en el marco de las pruebas de ajuste (§??), luego presentamos algunas pruebas clásicas motivadas por consideraciones asintóticas y describimos su comportamiento (§??.??).

Finalmente, proponemos un procedimiento para enfocar la eficiencia de las pruebas en las alternativas que elija el usuario. Imitamos así el comportamiento deseable de las pruebas clásicas, que permiten detectar todas las alternativas a la hipótesis de ajuste, para muestras suficientemente grandes, y son *casi* tan buenas como las pruebas óptimas del cociente de verosimilitudes para detectar cierta alternativa, y además diseñamos nuestras pruebas a la medida de las alternativas que queramos privilegiar.(§??.??)

Complementamos la presentación dando cuenta, mediante una lista de publicaciones vinculadas al *método de las transformaciones de procesos*, de la actividad de un grupo de investigadores, buena parte de los cuales son docentes de la Facultad de Ciencias Económicas y de Administración.

2. Las pruebas de ajuste

Se suele decir que la estadística se transforma en una disciplina científica organizada con la publicación en 1901 del primer número de *Biometrika*, la primera publicación periódica de carácter técnico dedicada al tema. Uno de los editores fundadores de *Biometrika* fue Karl Pearson.

En un sentido más conceptual, Pearson está ligado a otro hito del desarrollo de la estadística que también muestra al comienzo del Siglo XX como el inicio de una nueva etapa: los modelos aleatorios de la naturaleza adquirieron un importante desarrollo en el Siglo XIX. Durante ese tiempo, un modelo era aceptado o aceptable en tanto no se constataran fenómenos que lo contradijeran. Karl Pearson fue el primero que propuso una prueba de ajuste, que hoy conocemos como *Prueba χ^2 de Pearson*. Esta y otras pruebas de ajuste surgidas más tarde proporcionan un método científico para decidir, mediante la utilización de datos empíricos, si un modelo aleatorio es aceptable o si hay razones para rechazarlo, sin esperar pasivamente la eventual aparición de fenómenos contradictorios.

No fue hasta aproximadamente la cuarta década del Siglo que en un período de pocos años fueron propuestas otras pruebas de ajuste, que hoy conocemos genéricamente como pruebas de Cramér - von Mises y de Kolmogorov - Smirnov.

3. Aplicación de una heurística asintótica para el diseño de pruebas de ajuste

Supongamos que conocemos n observaciones X_1, X_2, \dots, X_n independientes e idénticamente distribuidas con distribución F y nos preguntamos si el modelo $\mathcal{H}_0 : F = F_0$ es adecuado para describir el fenómeno.

Nos interesa rechazar \mathcal{H}_0 cuando es falsa, pero especialmente cuando $F(t) = F_0(t - \delta)$, con $\delta \neq 0$.

Glivenko (?) y Cantelli (?) mostraron que cuando $n \rightarrow \infty$, la función de distribución empírica $F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{X_i \leq t\}}$ converge uniformemente a F casi seguramente, es decir

$$\mathbf{P}\left\{\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in \mathbf{R}} |F_n(t) - F(t)| = 0\right\} = 1.$$

Esto sugiere inmediatamente que un criterio para decidir rechazar \mathcal{H}_0 es

la constatación de que F_n está lejos de F_0 . Si no lo está, no hay motivos para pensar que \mathcal{H}_0 no es cierta.

Pero ¿qué significa que F_n está lejos de F_0 ? y ¿cuán lejos tiene que estar para conducirnos a rechazar \mathcal{H}_0 ?

La primera pregunta se responde definiendo una distancia entre funciones, por ejemplo la distancia del supremo

$$d(F_n, F_0) = \sup_{t \in \mathbf{R}} |F_n(t) - F_0(t)|$$

o una distancia con sabor probabilístico asociada a la distribución F_0 , a saber,

$$d_2(F_n, F_0) = \sqrt{\mathbf{E}(F_n(X) - F_0(X))^2}, \text{ con } X \text{ v. a. con distribución } F_0.$$

Si optamos por d , tendremos la Prueba de Kolmogorov - Smirnov: rechazamos \mathcal{H}_0 si $D = d(F_n, F_0)$ es grande (?). Si optamos por d_2 , la de Cramér - von Mises: rechazamos \mathcal{H}_0 si $C = d_2(F_n, F_0)$ es grande (?, ?).

La segunda pregunta, es decir, cuán grande tiene que ser la distancia para que decidamos rechazar \mathcal{H}_0 tiene una respuesta canónica en la teoría de las pruebas de hipótesis estadísticas: determinamos la distribución de probabilidades de la variable aleatoria $d(F_n, F_0)$ (o $d_2(F_n, F_0)$, según el caso) correspondiente al modelo que cumple \mathcal{H}_0 , encontramos la cuantila $1 - \alpha$ para un valor de α que representa la probabilidad de errar rechazando \mathcal{H}_0 cuando es cierta, y rechazamos \mathcal{H}_0 cuando $d(F_n, F_0)$ (o $d_2(F_n, F_0)$) es mayor que esa cuantila.

Una circunstancia afortunada es que las distribuciones asintóticas de $\sqrt{nd}(F_n, F_0)$ y $\sqrt{nd_2}(F_n, F_0)$ se conocen. De esta manera no sólo nos apoyamos en propiedades asintóticas para diseñar la prueba, sino que podemos usar las cuantilas $1 - \alpha$ de las distribuciones asintóticas como valores críticos aproximados, para muestras grandes.

4. Pruebas omnibus focalizadas

Las dos pruebas consideradas en la sección precedente son consistentes frente a cualquier alternativa fija. Esto significa que cuando $F \neq F_0$, el límite cuando n tiende a infinito de la probabilidad de rechazar \mathcal{H}_0 es uno. Se consideran entonces aptas para analizar todas las alternativas posibles y por ese motivo se dice que son *pruebas omnibus*.

Esto no significa que las pruebas sean igualmente sensibles a cualquier alternativa. Una manera de comparar la sensibilidad a alternativas de diferente forma sin perder la posibilidad de usar argumentos asintóticos, que cuando son accesibles resultan más simples que los aplicables a muestras finitas, es aproximar las hipótesis alternativas a la hipótesis nula a medida que el tamaño n de la muestra aumenta, de manera que ambas variaciones se compensen y la potencia de la prueba tenga límite no trivial (menor que uno) cuando $n \rightarrow \infty$. Llamemos \mathcal{H}_n a la alternativa de desplazamiento planteada al comienzo de §??, con un desplazamiento que tiende a cero a medida que n tiende a infinito $F(t) = F_0(t - \delta/\sqrt{n})$.

Las pruebas de Kolmogorov - Smirnov y de Cramér - von Mises son capaces de detectar las alternativas $F(t) = F_0(t - \delta/\sqrt{n})$ pero casi siempre con potencia esencialmente menor que la de la prueba óptima de Neymann y Pearson para comparar $F(t) = F_0(t)$ contra $F(t) = F_0(t - \delta/\sqrt{n})$. Esto no significa que una de esas pruebas sea mejor que la otra. La de K-S y la de C-vM tienen menor potencia que la de N-P, pero son consistentes frente a cualquier alternativa fija. En cambio la de N-P, que es más potente, no es consistente; hay alternativas que no detecta en absoluto.

Existen sin embargo casos excepcionales: La prueba de K-S detecta de manera casi óptima la alternativa bilateral $F(t) = F_0(t \pm \delta/\sqrt{n})$ cuando F_0 es la distribución doble exponencial (?). Con la prueba de C-vM ocurre algo similar: es casi óptima cuando F_0 es la distribución de densidad $f_0(t) = 1/(2 \cosh(\pi t/2))$?.

Estas propiedades de las pruebas clásicas de K-S y de C-vM muestran la conveniencia de usar una u otra cuando interesa a la vez tener una prueba consistente y que detecte especialmente las alternativas particulares para las que son casi óptimas, pero también sugieren que nos preguntemos: ¿Si queremos utilizar una prueba consistente al estilo de las mencionadas y además nos interesa especialmente no dejar pasar una alternativa particular que no es ninguna de las dos mencionadas, hay alguna prueba que reemplace a las clásicas y cumpla con esa meta?

La pregunta plantea un problema inverso al de determinar para qué alternativas es óptima una prueba dada, si es que existe alguna con esa propiedad. Ese problema inverso es el que resolvemos mediante las transformaciones de procesos.

Como primer paso para describir la solución, vamos a analizar por qué la prueba de Cramér - von Mises detecta de manera óptima las alternativas de desplazamiento a partir de la distribución cuya densidad llamaremos f_{CvM} .

Lo hacemos en la próxima sección que no hemos podido evitar que resulte un poco más técnica que el resto de esta presentación.

5. El estadístico de Cramér - von Mises y su comportamiento asintótico bajo alternativas

5.1. La transformación canónica

Un procedimiento muy utilizado para analizar el comportamiento de muestras de una distribución F_0 que suponemos continua, es reemplazar la muestra X_1, \dots, X_n por las nuevas variables $U_1 = F_0(X_1), \dots, U_n = F_0(X_n)$ que constituyen una muestra de la distribución uniforme.

El cambio $u = F_0(t)$ que lleva las $(X_i)_{i=1, \dots, n}$ en las $(U_i)_{i=1, \dots, n}$, lleva la función de distribución empírica $F_n(t)$ de las X en la distribución empírica $G_n(u)$ de las U , y la función de distribución $F_0(t)$ de las X en la función de distribución $G(u) = u$ de las U .

Como consecuencia, el estadístico de Cramér - von Mises para probar “ $F = F_0$ ”, normalizado mediante la multiplicación por n

$$n \mathbf{E}(F_n(X) - F_0(X))^2 \Big|_{\{X \sim F_0\}} = n \int (F_n(t) - F_0(t))^2 dF_0(t)$$

se transforma en el estadístico

$$n \mathbf{E}(G_n(U) - U)^2 \Big|_{\{U \text{ uniforme en } (0,1)\}} = n \int_0^1 (G_n(u) - u)^2 du$$

adecuado a probar si la distribución de las U es uniforme, cosa que ocurre si y sólo si la de las X es F_0 .

A este cambio de variables se le suele llamar *transformación canónica*.

5.2. La distribución asintótica del estadístico de C-vM

La transformación canónica nos permite reducir el problema al que se refiere a variables aleatorias en el intervalo $(0, 1)$. El estadístico es en ese caso

$$\omega_n^2 = \int_0^1 (\sqrt{n}(G_n(u) - u))^2 du.$$

Así como el tamaño (su distancia euclidiana al vector 0) de un vector (x_1, x_2, \dots, x_m) de \mathbf{R}^m puede medirse mediante la raíz de la suma de los cuadrados de sus componentes en un sistema de coordenadas ortogonales, el tamaño $\int_0^1 h^2(u)du$ (su d_2 -distancia a la función 0) de una función $h : (0, 1) \rightarrow \mathbf{R}$ puede medirse mediante la raíz de la suma de los cuadrados de sus componentes en un “sistema de coordenadas ortogonales para el intervalo $(0, 1)$ ”.

Un tal sistema es un conjunto infinito de funciones $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots$ con la propiedad $\int_0^1 \psi_i(u)\psi_j(u)du = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$, para el que las componentes de h según ψ se calculan mediante $h_j = \int_0^1 h(u)\psi(u)du$, h se expresa mediante el desarrollo:

$$h(u) = \sum_{j=0}^{\infty} h_j \psi_j(u)$$

y

$$\int_0^1 h^2(u)du = \sum_{j=0}^{\infty} h_j^2.$$

Se puede elegir una base particular que seguimos llamando $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots$, con $\psi_0 = 1$, para la cual el desarrollo de

$$r_n(u) = \sqrt{n}(G_n(u) - u) = \sum_{j=0}^{\infty} C_{j,n} \psi_j(u)$$

tiene por coeficientes $C_{0,n} = 0$ y variables aleatorias $C_{j,n}$, $j > 0$, que convergen a variables aleatorias gaussianas centradas independientes, cuando $F = F_0$.

Que los límites son variables gaussianas es consecuencia del Teorema del Límite Central, y que sean independientes se debe a la elección particular de la base. Esta base es la que está formada por las funciones $\psi_0 = 1$ y $\psi_j(u) = \sqrt{2} \sin j\pi u$ ($j = 1, 2, \dots$), y los detalles pueden verse, por ejemplo, en una monografía de ?.

Las variables aleatorias $(C_{j,n})_{j=1,2,\dots}$ tienen por límite $(B_j/j\pi)_{j=1,2,\dots}$, B_1, B_2, \dots i.i.d. normales típicas, $r_n(u)$ tiene límite $r(u) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_j}{j\pi} \psi_j(u)$ y ω_n^2 tiene por distribución límite la de

$$\omega^2(u) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_j^2}{j^2 \pi^2}.$$

Cuando la distribución $F^{(n)}$ de las variables X no coincide con F_0 sino que su densidad f_n difiere de la densidad f_0 de F_0 como lo describen las expresiones

$$\sqrt{\frac{f_n(t)}{f_0(t)}} = 1 + \frac{\delta k_n(t)}{2\sqrt{n}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int (k_n(t) - k(t))^2 dF_0(t) = 0, \quad \int k^2(t) dF_0(t) = 1,$$

resulta $\sqrt{n}(F_n(t) - F_0(t)) = \sqrt{n}(F_n(t) - F^{(n)}(t)) + \sqrt{n}(F^{(n)}(t) - F_0(t))$. Al reemplazar

$$\begin{aligned} F^{(n)}(t) &= \int_{-\infty}^t f_n(s) ds = \int_{-\infty}^t (f_n(s)/f_0(s)) dF_0(s) \\ &= \int_{-\infty}^t \left(1 + \frac{\delta k_n(s)}{\sqrt{n}} + \frac{\delta^2 k_n^2(s)}{4n} \right) dF_0(s), \end{aligned}$$

encontramos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(F^{(n)}(t) - F_0(t)) = \delta \int_{-\infty}^t k(s) dF_0(s).$$

Luego del cambio de variables que lleva a la distribución uniforme, encontramos que el límite de $\sqrt{n}(G_n(u) - u)$ se incrementa en $\delta \int_0^u \kappa(v) dv = \delta K(u)$, con $\kappa(F_0(t)) = k(t)$, y concluimos que el nuevo desarrollo de la distribución límite de $\sqrt{n}(G_n(u) - u)$ es $\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{B_j}{j\pi} + \delta K_j \right) \psi_j(u)$, donde K_j son los coeficientes del desarrollo de K ($K(u) = \sum_{j=1}^{\infty} K_j \psi_j(u)$).

Como consecuencia, la distribución límite de ω_n^2 es la de

$$\omega^2(\delta) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{B_j}{j\pi} + \delta K_j \right)^2$$

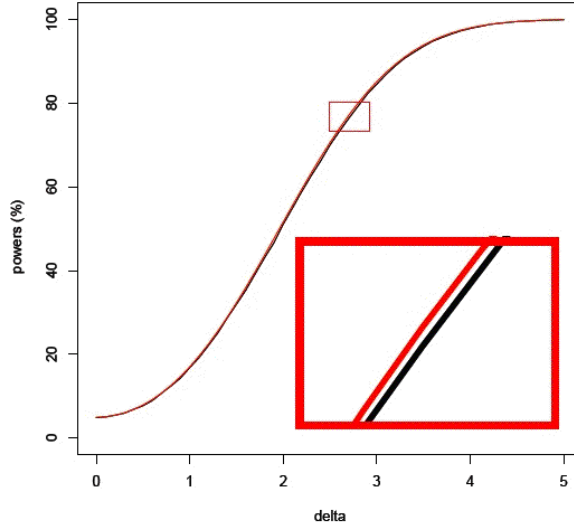
cuya esperanza es

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{j^2 \pi^2} + \delta^2 K_j^2 \right)$$

lo que representa un incremento de $\delta^2 \sum_{j=1}^{\infty} K_j^2$ respecto de la esperanza correspondiente a la hipótesis nula.

Para conseguir que el estadístico ω_n^2 sea más sensible a la presencia de la alternativa, una vez dado δ , conviene que $\sum_{j=1}^{\infty} K_j^2$ sea lo más grande posible.

Figura 1: Potencias prácticamente coincidentes de las pruebas de nivel 5 % basadas en el cociente de verosimilitudes (en rojo) y de la prueba de Cramér - von Mises para la alternativa privilegiada (en negro)



Un cálculo directo basado en la forma particular de las funciones ψ_j muestra que

$$\sum_{j=1}^{\infty} K_j^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\kappa_j^2}{j^2 \pi^2}.$$

Los coeficientes κ_j satisfacen $\sum_{j=1}^{\infty} \kappa_j^2 = 1$, como consecuencia de haber supuesto que $\int k^2(s) dF_0(s) = 1$, y esto nos lleva a concluir que la manera de elegir los κ_j para que el incremento de la esperanza sea máximo es cuando el primer coeficiente, κ_1 , vale uno, y los restantes valen cero. En otras palabras, cuando $\kappa = \psi_1$.

Quiere decir que si la alternativa fuera tal que $k(t) = \psi_1(F_0(t))$, sería de esperar una sensibilidad óptima de la prueba de Cramér - von Mises para detectarla. El cálculo de la potencia asintótica muestra que efectivamente, la potencia de la prueba para esa alternativa es *casi* óptima. En efecto, como muestra la Figura ??, la potencia óptima y la de la prueba de C-vM para la alternativa privilegiada son prácticamente coincidentes.

Encontrar cuál es la distribución F_0 tal que las alternativas de deslaza-

miento $F(t) = F_0(t - c/\sqrt{n})$ nos dan una función k que satisface esa condición implica resolver una ecuación diferencial cuya solución nos dice que esa distribución es la que tiene densidad f_{CvM} .

Esta parte del desarrollo no interesa a los efectos de resolver el problema inverso, es decir, en vez de buscar cuál es la distribución para la cual la prueba es óptima, cómo encontrar un estadístico que nos dé una prueba óptima para detectar un cambio dado en la distribución.

6. Diseño de pruebas consistentes y eficientes para la alternativa que elija el usuario

Una idea que permite resolver el problema inverso es encontrar una manera de reducir el problema al analizado en la sección anterior. En ella vimos que el estadístico de Cramér - von Mises con una alternativa que cumpla $\kappa = \psi_1$ tiene potencia casi óptima.

De otra manera: el estadístico $\int_0^1 r_n(u)^2 du$, donde $r_n(u)$ tiene derivada formal $\sum_1^\infty C_{j,n} \psi'(u) = \sum_1^\infty j\pi C_{j,n} \sqrt{2} \cos j\pi u \rightarrow \sum_1^\infty B_j \sqrt{2} \cos j\pi u + \delta\kappa(u)$ tiene un comportamiento óptimo cuando $\kappa = \psi_1$.

Las funciones $\gamma_0 = 1$, $\gamma_j = \sqrt{2} \cos j\pi u$ ($j = 1, 2, \dots$) constituyen también un sistema de coordenadas, en el que κ tiene un desarrollo $\kappa(u) = \sum_{j=1}^\infty \kappa_j \gamma_j$ y

$$\frac{dr_n(u)}{du} \sim \sum_1^\infty j\pi C_{j,n} \gamma_j \rightarrow \sum_{j=1}^\infty (B_j + \kappa_j) \gamma_j$$

Si cambiamos las coordenadas γ_j por nuevas coordenadas $\gamma_0^* = 1, \gamma_j^* (j = 1, 2, \dots)$, la distribución de $\sum_{j=1}^\infty B_j \gamma_j^*$ no cambia, y podemos elegir las nuevas coordenadas para que $\sum_{j=1}^\infty \kappa_j \gamma_j^* = \psi_1$.

Con este cambio obtenemos un nuevo estadístico funcional

$$r_n^*(u) = \int_0^u \sum_{j=1}^\infty \left(\int_0^1 \gamma_j(v) dr_n(v) \right) \gamma_j^*(u) du$$

para el que la respuesta de la integral del cuadrado a la alternativa κ es casi óptima.

Esta idea se puede llevar a la práctica en varios contextos, siempre que se tenga un estadístico funcional cuya derivada formal tenga por componentes variables aleatorias i.i.d. normales típicas.

En nuestras aplicaciones, el papel que juega en esta presentación la prueba de Cramér - von Mises, lo desempeña una modificación debida a Watson [?], que hemos encontrado preferible por razones técnicas.

Las pruebas de ajuste con alternativas de desplazamiento son un ejemplo muy particular del tipo de problemas para los que puede interesar diseñar pruebas adaptadas a la detección de ciertas alternativas, para los que hemos propuesto soluciones mediante la transformación de procesos que describen la información en las muestras.

Algunos ejemplos de alternativas \mathcal{H}_0 , \mathcal{H}_1 para las que podemos diseñar pruebas consistentes de \mathcal{H}_0 adaptadas a detectar de manera óptima \mathcal{H}_1 se indican en la siguiente tabla:

Hipótesis nula (\mathcal{H}_0)	Prueba enfocada en (\mathcal{H}_1)
X_1, \dots, X_n es una muestra de	
F_0	$F_0(t - \delta)$
F_0	$F^{(n)}$ como en §??
F_0	$F_0(\mu + \sigma(t - \mu))$
familia de posición y escala de F_0	familia de posición y escala de $F^{(n)}$
una distribución normal	una distribución asimétrica
una distribución normal	una distribución leptó- o plati-kúrtica
una distribución exponencial	una distribución de Weibull
$\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)^{\text{tr}}$ satisfacen un modelo lineal	
$\mathbf{Y} = \mathcal{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}$, \mathcal{X} de $n \times p$	$\mathbf{Y} = (\mathcal{X}, x_{p+1}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta} \\ \beta_{p+1} \end{pmatrix} + \boldsymbol{\epsilon}$
regresión polinómica de grado p	regresión polinómica de grado $p + 1$
la serie de tiempo estacionaria X_1, \dots, X_n responde a un modelo	
AR(p)	AR($p + 1$)
ARMA(p, q)	ARMA($p + 1, q$)
ARMA(p, q)	ARMA($p, q + 1$)

La bibliografía indicada luego de las referencias citadas en este artículo contiene las soluciones que proponemos para las situaciones indicadas en la tabla, excepto para los modelos ARMA. Sobre esos modelos, hay trabajo en curso.

Referencias

Cabaña, A. & Cabaña, E.M. (2010), On the focusing of Cramér - von Mises Test, en trámite editorial.

- Cantelli, F. P. (1933). Sulla determinazione empirica delle leggi di probabilita. *Giorn. Ist. Ital. Attuari* **4**, 421-424.
- Capon, J. (1965) On the asymptotic efficiency of the Kolmogorov - Smirnov test. *J. Amer. Statist. Assoc.* **60**, 843-853.
- Cramér, H. (1929) On the composition of elementary errors. *Skandinavisk Aktuarietidskrift* **11**, 13-74.
- Durbin, J. (1973), *Distribution Theory for Tests Based on the Sample Distribution Function*, SIAM Monograph.
- Glivenko, V.I. (1933) Sulla determinazione empirica delle leggi di probabilita *Giorn. Ist. Ital. Attuari* **4** 92-99.
- Kolmogorov, A. N. (1933). Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione. *Giorn. Ist. Ital. Attuari* **4**, 83-91.
- Von Mises, R. (1931). *Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Leipzig-Wien.
- Watson, G. S. (1961). Goodness-of-fit tests on a circle. *Biometrika* **48** 109-114.

Bibliografía: Artículos redactados en el marco del trabajo del GRUTPI

1993

- A. CABAÑA, *Transformations du pont brownien empirique et tests de type Kolmogorov-Smirnov*. C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. 317, no. 3, 315-318.

1996

- A. CABAÑA, *Transformations of the empirical measure and Kolmogorov-Smirnov tests*. Ann. Statist. 24, no. 5, 2020-2035.
- E. M. CABAÑA, *Modified Kolmogorov-Smirnov test for isotropic distributions in the plane*, Sankhya, 58, Series A, 440-463.

A. CABAÑA AND E. M. CABAÑA, *Bridge to bridge transformations and Kolmogorov-Smirnov tests*, Communications in Statistics - Theory and Methods, 25, 227-234.

1997

A. CABAÑA AND E. M. CABAÑA, *Transformed Empirical Processes and Modified Kolmogorov - Smirnov Tests for multivariate distributions*, Annals of Statistics, San Francisco, USA, 25 2388-2409.

E. M. CABAÑA, *Contiguity, goodness-of-fit tests and transformed empirical processes* (X Escuela Venezolana de Matemáticas -Lecture notes written with the collaboration of Alejandra Cabaña) (Spanish), Asociación Matemática Venezolana y Centro de Estudios Avanzados del IVIC, Caracas, Venezuela, 99 pp, 13 il.

E. M. CABAÑA, *Inference based on transformed empirical processes*. (Spanish) Proceedings of the Fourth “Dr. Antonio A. R. Monteiro” Congress on Mathematics (Spanish) (Bahía Blanca), 1-16, Univ. Nac. del Sur, Bahía Blanca, Argentina.

A. CABAÑA AND E. M. CABAÑA, *Modified Anderson-Darling tests with selective improvement of power*. (Spanish) Proceedings of the Fourth “Dr. Antonio A. R. Monteiro” Congress on Mathematics (Spanish) (Bahía Blanca), 33-38, Univ. Nac. del Sur, Bahía Blanca, Argentina.

J. GRANERI, *Una prueba de ajuste c_2 basada en procesos empíricos transformados*. Proceedings of the Fourth “Dr. Antonio A. R. Monteiro” Congress on Mathematics (Spanish) (Bahía Blanca), Univ. Nac. del Sur, Bahía Blanca, Argentina.

1998

A. CABAÑA AND E. M. CABAÑA, *Goodness-of-fit tests based on the Transformed Empirical Process*, Acta Científica Venezolana, Caracas, Venezuela, 49 234-240.

J. GRANERI, *A χ^2 goodness of fit test based on Transformed Empirical Processes*, Publicaciones Matemáticas del Uruguay, 8, 139-152.

JUAN KALEMKERIAN, *Prueba de bondad de ajuste para distribuciones isotropas en el plano basada en Procesos Empíricos Transformados*, Tesis de Maestría, PEDECIBA

1999

M. SCAVINO, *Procesos Empíricos Transformados y Pruebas de Kolmogorov-Smirnov con un parámetro estimado*, Publicaciones Matemáticas del Uruguay, Montevideo, Uruguay, 8 179-205.

M. SCAVINO, *Processi empirici trasformati e prove di bontà dell'adattamento in presenza di parametri stimati*, Università degli Studi di Padova, Italia, Tesi di Dottorato di Ricerca in Statistica.

M. SCAVINO, *Una prueba de normalidad basada en procesos empíricos transformados*, CD del Cuarto Congreso Latinoamericano de Sociedades de Estadística, Universidad Nacional de Cuyo, Mendoza, Argentina.

2000

A. CABAÑA AND E. M. CABAÑA, *Tests of symmetry based on Transformed Empirical Processes*, Canadian Journal of Statistics, 28 829 - 839.

2001

A. CABAÑA AND E. M. CABAÑA, *Goodness-of-fit tests based on quadratic functionals of Transformed Empirical Processes* Statistics, Gordon and Breach, Berlin, 35 171-189.

A. CABAÑA AND E. M. CABAÑA, *Modified Anderson-Darling test with selective power improvement*, Publicaciones Matemáticas del Uruguay, 9 1-13.

2002

E. M. CABAÑA, *El Proceso de Wiener y el Teorema del Límite Central*, Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 9 181-192.

2003

A. CABAÑA AND E. M. CABAÑA, *Tests of normality based on Transformed Empirical Processes*, Methodology and Computing in Applied Probability, 5 309-335.

JORGE GRANERI, χ^2 -Type Goodness of Fit Test Based on Transformed Empirical Processes for Location and Scale Families Communications in Statistics - Theory and Methods, **32** 2073 - 2087.

2005

A. CABAÑA AND E. M. CABAÑA, *Goodness-of-fit to the Exponential Distribution, focused on Weibull alternatives*, Communications in Statistics, Simulation and Computation, **34** 711-723.

2006

JUAN KALEMKERIAN, *Test de normalidad basado en un estadístico del tipo de Cramér - von Mises recortado*. Tesis de doctorado, Programa de Desarrollo de las Ciencias Básicas (PEDECIBA), Uruguay.

2007

A. CABAÑA, E.M. CABAÑA, M. SCAVINO, *Transformaciones de procesos en la inferencia estadística*, Actas SEIO (Congreso Nacional de Estadística, Investigación Operativa y Jornadas de Estadística Pública), Universidad de Valladolid y Junta de Castilla y León, Valladolid, España, ISBN 978-84-690-7249-3

2008

A. CABAÑA, E. M. CABAÑA, M. SCAVINO, *Transforming processes in inference: goodness-of-fit for autoregressive models*, (CD) Actas del International Workshop on Applied Probability (IWAP), Université de Technologie de Compiègne, Francia.

IGNACIO ÁLVAREZ, NATALIA DA SILVA, *Pruebas de normalidad. Paquete TEP en R*, (CD) Actas del VIII CLATSE, Instituto de Estadística, Universidad de la República.

MARÍA ELISA BERTINAT, DARÍO PADULA, *Extensión de la prueba de normalidad basada en procesos empíricos transformados para el caso bivariado*, (CD) Actas del VIII CLATSE, Instituto de Estadística, Universidad de la República.

A. CABAÑA, E.M. CABAÑA, M. SCAVINO, *Transformaciones de procesos en la inferencia estadística*, (CD) Actas del VIII CLATSE, Instituto de Estadística, Universidad de la República.

2009

A. CABAÑA AND E. M. CABAÑA, *Goodness-of-fit tests for continuous regression* Methodology and Computing in Applied Probability, **11** 119-144.