LA TASA DE INTERÉS COMO VARIABLE ALEATORIA EN LOS SEGUROS DE MUERTE Y LAS RENTAS DE VIDA TRADICIONALES.

Cr. Sergio Barszcz 1/

RESUMEN

El objetivo general del documento es incorporar en el análisis de una primera gran área temática vinculada al campo actuarial (los seguros de muerte y las rentas de vida tradicionales) el tratamiento de la tasa de interés como variable aleatoria desde una perspectiva conceptual y luego llevar a cabo en forma aplicada los desarrollos concretos involucrados en la resolución de los cálculos.
El marco teórico del trabajo se basa en los desarrollos hechos en este campo del conocimiento, en especial, desde el momento en que se han incorporado variables aleatorias para modelizar el valor presente de las indemnizaciones a pagar por el asegurador en los seguros de muerte y las rentas de vida tradicionales.
No obstante buena parte de este último desarrollo se ha basado en el supuesto de considerar la tasa de interés como determínistica e incluso como constante.
De esta forma, el trabajo se concentra en superar esta situación, a través de diversos mecanismos de incorporar la aleatoriedad a la tasa de interés en este contexto, inspirados en los aportes bibliográficos basados en algunos materiales que efectuaron las primeras propuestas y en artículos significativamente más recientes que se han dedicado a profundizarlos.
En el trabajo se utilizan además métodos de simulación para la resolución de los ejemplos que se analizan en el marco del proyecto.
Este documento estará referido como ya se dijo a los seguros de muerte y rentas de vida tradicionales. Ello constituye un primer paso de un trabajo bastante más amplio donde se procurará incorporar el tratamiento de la tasa de interés como variable aleatoria a los fondos de pensión, el modelo colectivo de largo plazo y los seguros tradicionales de no vida.

Palabra clave 1: Actuarial, Palabra clave 2: Tasa de interés como variable aleatoria.

I. Introducción

I.1 Algunas consideraciones previas.

Para contextualizar adecuadamente este trabajo, haremos referencia a distintos mecanismos que se pueden utilizar para calcular el costo puro de los seguros de muerte y las rentas de vida tradicionales.

[1] / Profesor Titular Departamento de Métodos Matemáticos Cuantitativos – Facultad de Ciencias Económicas y de Administración – Universidad de la República

I.1.1. Utilización del concepto de equivalencia financiera

Una primera forma de cálculo del costo puro de un seguro vinculado a la vida, consiste en utilizar el método euleriano. Se trata de un esquema determinístico, para lo cual consideraremos dos funciones biométricas (l_x y d_x) y el concepto de equivalencia financiera.

Ejemplo 1: Una persona de exactamente x años de edad celebra un contrato por el cual el asegurador se compromete a abonar al o a los beneficiarios $1 en el aniversario del contrato inmediato posterior al fallecimiento, cualquiera sea el momento en que esto ocurra.

Denotaremos $ $CPSM_x$ al costo puro de ese seguro de muerte vida entera para una persona de edad x, de capital $1 y supondremos que l_x contratan el seguro y cada uno paga $ $CPSM_x$ .Por otra parte, el asegurador deberá abonar d_x dentro de un año, d_{x+1} dentro de dos y así sucesivamente.

Entonces tendremos para el ejemplo 1:

$$l_x.CPSM_x = 1.d_x.v + 1.d_{x+1}.v^2 + ... + 1.\mathrm{d}_{w-1}.v^{w-x} \Rightarrow$$
$$CPSM_x = \frac{1}{l_x}\sum_{k=0}^{w-x-1} d_{x+k}.v^{k+1}$$

Ejemplo 2: Una persona de exactamente x años de edad celebra un contrato por el cual el asegurador se compromete a abonar al asegurado $1 al comienzo de cada año, mientras el asegurado esté con vida.

Denotaremos $ $CPRVA_x$ al costo puro de esa renta de vida anual, adelantada, inmediata de cuotas de $1 para una persona de edad x, y supondremos que l_x contratan la renta y cada uno paga $ $CPRVA_x$. Por otra parte, el asegurador deberá abonar l_x de inmediato, l_{x+1} dentro de un año, l_{x+2} dentro de dos años y así sucesivamente mientras que haya una persona con vida del grupo.

Para este ejemplo:

$$l_x.CPRVA_x = 1.l_x + 1.l_{x+1}.v + ... + 1.l_{w-1}.v^{w-1-x} \Rightarrow$$
$$CPRVA_x = \frac{1}{l_x}\sum_{k=0}^{w-x-1} l_{x+k}.v^k$$

I.1.2. Utilización de probabilidades de vida y muerte de personas

Una segunda forma de calcular el costo puro de un seguro vinculado a la vida, consiste en ponderar cada uno de los pagos que deberá efectuar el asegurador al asegurado por la probabilidad de tener que hacer ese pago y hacer la actualización financiera correspondiente. La suma de tales importes ponderados es el costo puro del seguro.

Si se parte de los ejemplos vistos en el punto anterior, se llegan a los mismos resultados.

I.1.3 Utilización de valores de conmutación

Se definen valores de conmutación, en particular:

$$D_x = l_x.v^x,\ N_x = \sum_{k=0}^{k=w-1-x} D_{x+k},\ C_x = d_x.v^{x+1}, M_x = \sum_{k=0}^{k=w-1-x} C_{x+k}$$

Se puede ver muy fácilmente que:

$$CPSM_x = \frac{M_x}{D_x};\ CPRVA_x = \frac{N_x}{D_x}$$

I.1.4 Utilización de variables aleatorias para representar el tiempo de sobrevida

En este esquema se produce un salto de calidad en la naturaleza de los planteos, efectivamente: mientras antes solo podíamos calcular el costo puro de las operaciones de seguro, ahora podremos obtener además otros conceptos en base a la definición de tres variables aleatorias: X (edad de muerte de un recién nacido), T(x) (tiempo de sobrevida de una persona de edad x) y K(x) (tiempo de sobrevida medida en años enteros de una persona de edad x).

Las dos primeras son variables aleatorias absolutamente continuas (y por ende tienen una función de densidad y una función de distribución) mientras que la última es una variable aleatoria discreta (con función de cuantía y de distribución). Así tendremos:

La función de densidad y de distribución de T(x) son respectivamente:

$$g(t) = {}_t p_x.\mu_{x+t}\ ; G(t) = {}_t q_x$$

Por su parte, la función de densidad y de distribución de X son respectivamente:

$$f(x) = {}_x p_0.\mu_x\ ; F(x) = {}_x q_0$$

Y finalmente la función de cuantía y de distribución de K(x)

$$P(K(x) = k) = {}_k p_x.q_{x+k};\ P(K(x) \leq k) = {}_{k+1} q_x$$

Con estas variables aleatorias, es posible modelizar el valor presente de las operaciones de seguros vinculados a la vida.

Así pues, en el caso del seguro de muerte que estamos analizando, tendremos que el valor presente del pago de indemnización a efectuar por el asegurador es V^{K+1}, mientras que, en el caso de la renta de vida que estamos analizando, el valor presente de los pagos a efectuar por el asegurador es V(1,K+1,i)

Como se determinan los costos puros en estas situaciones?

Calculando los valores presentes esperados (valores presentes actuariales ,vpa) en cada una de las situaciones.

Así, por ejemplo, tendremos:

$$CPSM_x = E(v^{K+1}); CPRVA_x = E[V(1, K+1, i)]$$

En que aspectos esta forma de encarar el tema presenta ventajas?

En la posibilidad de calcular distintos momentos (por ejemplo, la varianza) de las variables aleatorias valor presente, en la posibilidad de determinar la distribución de las variables aleatorias valor presente y con ello los percentiles que interesen, en facilitar el cálculo actuarial de seguros sobre varias vidas (noción de estado), en facilitar el trabajo con los modelos de decremento múltiple.

Que otros aspectos se desarrollaron simultáneamente con este enfoque?

Se construyeron tablas de mortalidad con procedimientos técnicamente superiores, se construyeron tablas de mortalidad específicas para ciertas poblaciones, se formuló la función de cuantía de K(x) en función de los datos de una tabla de mortalidad y se diseñaron modelos para T(x) en base a la K(x) y los supuestos sobre edades fraccionarias en cada año de edad.

I.1.5 Tasa de interés aleatoria

Un aspecto que si bien ha sido planteado en trabajos académicos (algunos hace ya varias décadas) ha tenido una difusión más acotada, es el tema de un adecuado tratamiento de la tasa de interés. Efectivamente, es habitual que en textos y trabajos sobre matemática actuarial relativamente recientes se suponga que la tasa de interés de largo plazo es no sólo deterministica sino constante. En la práctica, desde una perspectiva “comercial” se han diseñado productos “flexibles” para atenuar el impacto de esta situación.

No obstante, el problema conceptual subsiste. El supuesto de tasa de interés determínistica (e incluso constante), a menos situaciones relativamente excepcionales, dista mucho de verificarse en la práctica. Para ello basta observar cualquiera de las series de tasas de largo plazo de diversos instrumentos financieros.

I.2. Introducción

En los desarrollos tradicionales de seguros y rentas de vida se supone que el tiempo hasta el decremento y la causa de decremento son variables aleatorias cuya distribución conjunta es conocida. En estos modelos cuando se analizan operaciones financieras de largo plazo se supone habitualmente que la tasa de interés es determinística y muchas veces constante. Del análisis de la evolución del rendimiento de cualquier instrumento financiero a largo plazo se observa que este supuesto no es realista.

I.2.1. Incorporando la variabilidad del interés

Hay varios métodos para incorporar la variabilidad de la tasa de interés en los modelos actuariales.

Un primer esquema es considerar escenarios de tasa de interés preestablecidos. Los escenarios son secuencias de tasas de interés, indexadas por el tiempo, que serán utilizadas junto a otros supuestos y el principio de equivalencia para la determinación de premios y reservas. En modelos más exhaustivos se pueden incorporar otras variables tales como gastos y tasas de retiro que sean consistentes con las tasas de interés.

Más aún, en estos últimos modelos, las tasas de interés por si mismas, tanto para un escenario como entre escenarios, pueden ser construidas para satisfacer ciertas condiciones económicas. En este contexto, se presentan dos alternativas:
a) Los escenarios pueden ser especificados sin modelizar los datos pasados y diseñados simplemente para analizar la adecuación de premios y reservas en diferentes situaciones plausibles. Esto constituye, en definitiva, un análisis de sensibilidad.
b) Los escenarios pueden ser determinados luego de una sistemática revisión de proyecciones macroeconómicas alternativas asociando además a cada escenario una probabilidad fijada por el actuario.

Un segundo esquema son los modelos estocásticos que se basan frecuentemente en un análisis de los datos históricos. Este método está típicamente centrado en los datos, y tanto la determinación del modelo como la estimación de sus parámetros se basa en los datos históricos. Los datos de algunos mercados de capitales pueden soportar la realización de un supuesto por el cual se considera las tasas efectivas anuales como variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Otros datos pueden soportar la realización de una hipótesis por la cual se consideran las tasas efectivas anuales como variables aleatorias dependientes. Cada una de estas clases de modelos pueden ser divididos en aquellos en los cuales la información económica relevante es capturada en las tasas de interés observadas y aquellos en los cuales las tasas de interés son modelizadas como dependientes de otras variables económicas incorporadas al modelo.

Un tercer enfoque es aquel en los que el tratamiento del tema depende de ciertas características de los mercados de capitales. En finanzas, teorías elaboradas de funcionamiento del mercado de capitales han sido desarrolladas. Una consecuencia de una de estas teorías es que una previsión de las condiciones financieras futuras es provisto por los precios de las acciones y sus relaciones.

La aplicación de estos enfoques requieren de conocimientos de macroeconomía, estadística aplicada y finanzas.

II. Notación y preliminares.

Usaremos I_k para denotar la variable aleatoria tasa de interés en el k-simo período de la transacción; esto es, I_k es la tasa efectiva de interés de un período para ese k-simo período: 1 al final del período tiene un valor presente de $1/(1+ I_k)$ al comienzo del período. Tratar en forma determinística la tasa de interés es similar a considerar que la distribución de las I_k con k = 1,2, ……….tiene una distribución degenerada con $P(I_k =i)=1$ con k = 1,2, ……….

La desigualdad de Jensen en esta situación implica

$E(u(X)) \geq u(E(X))$

Si $u(x)=(1+x)^{-1}$ y $X= I_k$ tenemos $u''(x)>0$, $-1<x$ y $E[(1+I_k)^{-1}] \geq [1+E(I_k)]^{-1}$

Donde la igualdad se da solo si I_k tiene una distribución degenerada.

La desigualdad antes mencionada puede ser convertida en una afirmación acerca del efecto de una tasa de interés randómica en el valor presente actuarial de una unidad pagada al final de un período. De esta forma el valor presente actuarial en este caso no puede ser menor que el valor presente del pago a la tasa de interés esperada.

III. Concepto de escenario.

Un escenario es un esquema de una secuencia proyectada de eventos. De acuerdo con esta definición, la determinación de los premios y las reservas en los seguros de vida requiere escenarios de eventos demográficos y económicos futuros.

Cuando se consideraba la tasa de interés determinística había un único escenario de tasas de interés futuras y usualmente las tasas eran idénticas. En los dos capítulos siguientes la idea de crear y usar un número de escenarios de tasas de interés es desarrollada.

III.1 Escenarios determinísticos.

En este capítulo, un escenario de tasa de interés determinístico se presenta como una secuencia de tasas de interés futuras de un solo período (i1, i2, i3,…) que ha sido determinado por el actuario para usarlo en los cálculos actuariales. Los elementos de la secuencia son seleccionados de forma que representen tasas de interés prospectivas plausibles de acuerdo a la visión del actuario de posibles contextos económicos futuros. Un escenario puede ser suficiente si el actuario está seguro del retorno futuro de la inversión como resultado de decisiones de inversión pasadas o en función de algún conocimiento especial. Como alternativa varios escenarios pueden ser especificados de forma que la sensibilidad de los valores presentes actuariales a cambios del contexto económico pueda ser estudiado.

Si varios escenarios son usados, indexaremos los escenarios como j=1,2,…,m, donde m es el número de escenarios y $({}_ji_1,\ {}_ji_2,\ {}_ji3,\ldots)$ denota las tasas de interés del escenario j.

Adicionalmente el factor de descuento del valor de la renta específica para el escenario j se denota de la siguiente forma :

$$ {}_j v^0 = 1,\ {}_j v^k = \prod_{r=1}^{k} (1 + {}_j i_r\ )^{-1}\ y\ {}_j V(1,n,i) = \sum_{k=0}^{n-1} {}_j v^k $$

Usando esta notación es natural definir:

$$ {}_j A_x = E[{}_j v^{K+1}] = \sum_{k=0}^{\infty} {}_j v^{k+1} \cdot {}_k p_x . q_{x+k} $$

$$ {}_j \ddot{a}_x = E[{}_j V(1,K+1,i)] = \sum_{k=0}^{\infty} {}_j V(1,k+1,i)\, {}_k p_x q_{x+k} $$

donde K es la variable aleatoria definida como el número de años enteros de sobrevida futura de un vida de edad x. Aplicando el principio de equivalencia tenemos

$$ {}_j P_x = \frac{{}_j A_x}{{}_j \ddot{a}_x} $$

Haciendo cuentas se obtienen las varianzas que resulten de interés.

<u>III.2) Escenarios aleatorios con tasas de interés determinísticas</u>.

Al construir un modelo para analizar tasas de interés asuma que el actuario ha formulado m posibles escenarios. A continuación una distribución de probabilidad de los m escenarios puede ser especificada usando métodos para explicitar la probabilidad subjetiva de cada uno de ellos. El símbolo p(j) denota la probabilidad del escenario j.

La asignación de probabilidad debería reflejar el punto de vista del actuario de los retornos de las inversiones futuras. El proceso de explicitación de la probabilidad está fuertemente relacionado con el proceso de explicitación de la función de utilidad.

Los valores presentes actuariales son definidos usando la distribución conjunta de los años enteros de sobrevida futura (K) y el escenario de la tasa de interés (J). El símbolo J será usado para denotar la variable aleatoria asociada al índice del escenario de la tasa de interés. Se supone habitualmente que K y J son indepedientes. El presubíndice asterisco ha sido agregado a los símbolos de valor presente actuarial indicando que la esperanza ha sido calculada respecto a K y J.

$$ {}_* A_x = E_J E_{K/J}[{}_J v^{K+1}] = E_J[{}_J A_x] = \sum_{j=1}^{m} {}_j A_x p(j) $$

$$_{*}\ddot{a}_x = E_J E_{K/J}[\,_J V(1, K+1, i] = E_J[\,_J\ddot{a}_x] = \sum_{j=1}^{m} \,_j\ddot{a}_x \, p(j)$$

y usando el principio de equivalencia llegamos a que

$$_{*}p_x = \frac{_{*}A_x}{_{*}\ddot{a}_x}$$

IV. Tasas de interés independientes

En la sección anterior se analizaron escenarios aleatorios con tasas de interés determinísticas. La asignación de probabilidad de cada uno de los escenarios que se requiere en esta situación eran realizadas en base al conocimiento en materia económica del actuario. Consideremos ahora un modelo estocástico de las tasas de interés en los cuales el modelo y la estimación de sus parámetros han sido influenciados por los datos históricos. Suponga que el actuario ha decidido modelizar la fuerza del interés y ha decidido utilizar el siguiente modelo:

$$\log(1 + I_k) = \delta + \varepsilon_k \qquad k = 1, 2, ...$$

donde δ es una constante no negativa y los ε_k son variables aleatorias i.i.d. cada uno de ellos con una distribución $N(0,\sigma^2)$. Este modelo puede ser visto como una fuerza del interés media sujeto a shocks aleatorios. Dados los supuestos realizados sobre ε_k, es posible de que se den fuerzas del interés negativas. Para algunos actuarios, esto vuelve inválido el modelo seleccionado. Otros lo adoptan por considerar que la fuerza del interés puede ser negativa dado que esta situación se da a veces en la realidad De esta forma $\log(1+I_k)$ tienen una distribución $N(\delta, \sigma^2)$ y las variables $(1+I_k)$ tienen distribución lognormal.

Recordando la expresión de la fórmula de esperanza y varianza de una distribución lognormal se obtiene que:

$$E(1 + I_k) = \exp(\delta + \frac{\sigma^2}{2}) \geq 1$$

$$Var(1 + I_k) = (e^{\sigma^2} - 1)\exp(2\delta + \sigma^2) \geq 0$$

El logaritmo de la variable aleatoria correspondiente al factor de acumulación deterministico $(1+i)^n$ es la variable aleatoria

$$\log(\prod_{k=1}^{n}(1 + I_k)) = \sum_{k=1}^{n} \log(1 + I_k)$$

y recordando la definición que se hizo cuando se planteó el modelo, se concluye que esta nueva variable aleatoria tiene distribución $N(n\delta, n\sigma^2)$. Consecuentemente, la función de acumulación del interés tiene una distribución lognormal dada por

$$E\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+I_k\right)\right)=\exp\left(n\left(\delta+\frac{\sigma^2}{2}\right)\right)$$

$$Var\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+I_k\right)\right)=\left(e^{\sigma^2}-1\right).\left(e^{n.\left(2\delta+\sigma^2\right)}\right)$$

Es interesante observar que si $\sigma^2 = 0$, el factor de intereses acumulados esperado es $e^{n\delta}$ y su varianza es cero.

El logaritmo del factor de descuento es

$$\log(1+I_k)^{-1}=-\log(1+I_k)=-\delta-\varepsilon_k$$

tiene una distribución $N(-\delta,\sigma^2)$ y $(1+I_k)^{-1}$ tiene una distribución lognormal dada por

$$E\left[(1+I_k)^{-1}\right]=\exp(-(\delta-\frac{\sigma^2}{2}))>0$$

$$Var\left[(1+I_k)^{-1}\right]=(e^{\sigma^2}-1)(\mathrm{e}^{(-2\delta+\sigma^2)})\geq 0$$

Definiendo la función de descuento como la variable aleatoria dada por

$$\tilde{v}_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+I_k\right)^{-1} \text{ y } \tilde{v}_0=1$$

cuya esperanza y varianza es

$$Esp=\exp(-n(\delta-\frac{\sigma^2}{2})), Var=(e^{n\sigma^2}-1).(e^{n(-2\delta+\sigma^2)})$$

Asumiendo que I_k para k=1,2,3,……… y K tiempo de sobrevida en años enteros son mutuamente independientes, si se desea analizar un seguro de muerte de capital unitario, vida entera, con pago en el aniversario del contrato inmediato posterior al fallecimiento y haciendo cuentas se llega a que

$$_{*}A_x=E\left(\tilde{v}^{K+1}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-(\delta-\sigma^2/2)(k+1)}\cdot {}_k p_x . q_{x+k}$$

$$Var\left(\tilde{v}^{K+1}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-(k+1)\left[2(\delta-\sigma^2)\right]}\cdot {}_k p_x . q_{x+k}-\left({}_{*}A_x\right)^2$$

Los cálculos para una renta de vida adelantada de \$ 1 por año, vida entera, requieren cálculos más extensos, cuyo desarrollo aporta poco desde el punto de vista conceptual.

V. Tasas de interés dependientes

En el campo de las finanzas ha habido una continua discusión acerca de si el rendimiento de varias clases de inversiones pueden ser modelizados a través de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Si el actuario adopta el supuesto de considerar las tasas de interés como variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, puede recurrir a los desarrollos efectuados en la sección anterior. El actuario puede adoptar otros supuestos. Por ejemplo, se puede considerar que los términos de shocks aleatorios ε_k pueden no seguir una distribución $N(0, \sigma^2)$.

Si el actuario rechaza la hipótesis de considerar las tasas de interés efectivas como variables aleatorias independientes se le abren dos opciones. La primera opción es desarrollar un modelo multivariado que no cambia a medida que el tiempo pasa. Tales modelos se llaman estacionarios. Un ejemplo sencillo de esta clase de modelos se desarrolla en la sección siguiente.

La segunda opción es adoptar un modelo que incorpora la posibilidad de cambios estructurales en las inversiones. Este tipo de modelo no es desarrollado en este trabajo.

<u>V.1 Modelos de media móviles</u>

Los desarrollos de esta sección se limitan a considerar el modelo

$$\log(1+I_k) = \delta + \varepsilon_k - \theta\varepsilon_{k-1} \qquad k = 1,2,.......$$

donde $\delta > 0$, y ε_k con k= 1,2,3,…………son variables aleatorias i.i.d. cada uno de ellos con una distribución $N(0,\sigma^2)$. Además el valor absoluto de θ es menor o igual a 1 y ε_0 es conocido. Si $\theta=0$, el modelo que aquí se plantea es el mismo que en el caso de considerar variables aleatorias independientes. El modelo es llamado modelo de medias móviles de orden 1, abreviado como MA(1)

El razonamiento que considera el modelo es que la fuerza del interés tiene una media de largo plazo, denotada por δ, pero donde los shocks randómicos crean desviaciones respecto a la media. El shock del período k, ε_k, tiene un impacto dilatado y moderado sobre la fuerza del interés del período k+1 de tamaño $-\theta\ \varepsilon k$

Retomando la definición de $\tilde{v}_n$ ya explicitada

$$\tilde{v}_n = \prod_{k=1}^{n}(1+I_k)^{-1} = \exp(-\sum_{k=1}^{n}(\delta + \varepsilon_k - \theta\varepsilon_{k-1}))$$

$$\log \tilde{v}_n = -\sum_{k=1}^{n}(\delta + \varepsilon_k - \theta\varepsilon_{k-1})$$

$$E(\tilde{v}_n) = E(\exp -(n\delta + \varepsilon_k - \theta\varepsilon_0 + (1-\theta)\sum_{k=1}^{k=n-1} \varepsilon_k))$$

Hemos asumido que los términos de shock ε_k *con* k=1,2,.....n son mutuamente independientes y cada uno tiene una distribución $N(0,\sigma^2)$. Por lo tanto, recordando la función generatriz de momentos de una distribución $N(0,\sigma^2)$ tenemos que:

$$E(e^{t\varepsilon_k}) = e^{t^2\sigma^2/2} \text{ con k=1,2,.......,n}$$

$$= M(t)$$

Este resultado nos permite escribir:

$$E(\tilde{v}_n) = e^{-n\delta}.M(-1).e^{\theta\varepsilon_0}.M(\theta-1)^{n-1} = C_1.e^{-n\delta'} \quad \text{n=1,2,3,....}$$

donde $C_1 = M(-1).e^{\theta\varepsilon_0}.M(\theta-1)^{-1}$ y $\delta' = \delta\text{-log M}(\theta\text{-1})$. Note que, tal como en el caso de las tasas de interés como variables aleatorias independientes, definimos $\tilde{v}_0 = 1$ y $\text{E}(\tilde{v}_0) = 1,$ no C_1

Si $\theta = 0,$ entonces $\delta' = \delta\text{-log M(-1)},\ C_1 = 1$ y $\text{E}(\tilde{v}_n) = e^{-n[\delta - \log M(-1)]} = e^{-n(\delta - \sigma^2/2)}$, lo que concuerda con el modelo independiente lognormal.

Con estos resultados preliminares, podemos calcular los valores presentes actuariales. El desarrollo inicial será el seguido para tasas de interés independientes:

$$_*A_x = \text{E}[\tilde{v}_{K+1}] = E_{\tilde{v}} E_{K/\tilde{v}}[\tilde{v}_{K+1}]$$

$$= E_{\tilde{v}}\left[\sum_{k=0}^{k=\infty} \tilde{v}_{k+1} \cdot {}_k p_x . q_{x+k}\right] = C_1.\left[\sum_{k=0}^{k=\infty} e^{-(k+1)\delta'} \cdot {}_k p_x . q_{x+k}\right]$$

Similarmente,

$$_*\ddot{a}_x = E[(V(1,K+1,\tilde{v})] = E_{\tilde{v}}\ E_{K/\tilde{v}}[(V(1,K+1,\tilde{v})] =$$

$$E_{\tilde{v}}\ [\sum_{k=0}^{\infty}\left(1 + \sum_{s=1}^{k} \tilde{v}_s\right) \cdot {}_k p_x . q_{x+k}] =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(1 + \sum_{s=1}^{k} C_1.e^{-s\delta'}\right) \cdot {}_k p_x . q_{x+k} =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[1 + C_1.V(0,k,\delta')\right] \cdot {}_k p_x . q_{x+k}$$

Para hacer el cálculo de la varianza, debemos desarrollar fórmulas para $E\left[\tilde{v}_r\ \tilde{v}_s\right],\ \text{s} < \text{r}$:

$$E\left[\left(\tilde{v}_n\right)^2\right]=E[e^{-2\left[n\delta+\varepsilon_n-\theta\varepsilon_0+(1-\theta)\sum_{k=1}^{n-1}\varepsilon_k\right]}$$

$$=e^{-2n\delta}.E\left(e^{-2n\varepsilon_k}\right).E\left(e^{2\theta\varepsilon_0}\right).E(e^{-2(1-\theta)\varepsilon})^{n-1}$$

$$=e^{-2n\delta}.M(-2).\left(e^{2\theta\varepsilon_0}\right).M(2\theta-2)^{n-1}$$

Usando notación abreviada:

$$E\left[\left(\tilde{v}_n\right)^2\right]=C_2.e^{-\delta''.n},$$

donde $\delta''=2\theta-\log M\left[2\theta-2\right]$ y

$$C_2=\frac{M(-2).e^{2\theta\varepsilon_0}}{M(2\theta-2)}$$

El término $E\left[\tilde{v}_r\ \tilde{v}_s\right]$ aparece en la expresión de $Var(V(1,K+1,\tilde{v}))$.

Nótese que $E\left[\tilde{v}_r\ \tilde{v}_0\right]=E\left[\tilde{v}_r\right]$. Si $r>s\geq 1,$ tenemos:

$$E[\tilde{v}_r\ \tilde{v}_s]=E[e^{-[r\delta+\varepsilon_r-\theta\varepsilon_0+(1-\theta)\sum_{j=1}^{r-1}\varepsilon_j]}.e^{-[s\delta+\varepsilon_s-\theta\varepsilon_0+(1-\theta)\sum_{j=1}^{s-1}\varepsilon_j]}=$$

$$e^{-(r+s)\delta}.E\left[e^{-\varepsilon_r}\right].E\left[e^{(\theta-2)\varepsilon_S}\right].E[e^{2\theta\varepsilon_0}].E[e^{-2(1-\theta)\sum_{j=1}^{s-1}\varepsilon_j}].E[e^{-2(1-\theta)\sum_{j=s+1}^{r-1}\varepsilon_j}]$$

$$=e^{-(r+s)\delta}.M(-1).M(\theta-2).e^{2\theta\varepsilon_0}.M[2(\theta-1)]^{s-1}.M(\theta-1)^{r-s-1}]$$

$$=C_3.e^{-\delta''.s}.e^{-\delta'(r-s)}$$

donde δ' y δ'' han sido definidas previamente y

Usando estos elementos, volvemos al desarrollo de la varianza de las variables aleatorias en las que la fuerza del interés tiene asociado un modelo MA(1):

$$Var(\tilde{v}_{K+1})=E\left[\left(\tilde{v}_{K+1}\right)^2\right]-({}_*A_x)^2=\sum_{k=0}^{\infty}C_2.e^{-\delta''(k+1)}\cdot{}_k p_x.q_{x+k}-({}_*A_x)^2,$$

y para la $Var(V(1,K+1,\tilde{v})$, empezamos con

$$E_{\tilde{v}}\left[\left(\sum_{s=0}^{k}\tilde{v}_s\right)\right]=E_{\tilde{v}}\left[\left(1+\sum_{s=1}^{k}\tilde{v}_y^2\right)+2\sum_{s=0}^{k-1}\sum_{r=s+1}^{k}\tilde{v}_r\tilde{v}_s\right]=$$

$$\left(1+\sum_{s=1}^{k}C_2.e^{-\delta''s}\right)+2\left(\sum_{r=1}^{k}C_1.e^{-r\delta'}+2\sum_{s=1}^{k-1}\sum_{r=s+1}^{k}C_3.e^{-\delta''s-\delta'(r-s)}\right)=$$

Entonces,

$$Var(V(1,K+1,\tilde{v}) = \sum_{k=0}^{\infty} E_{\tilde{v}}\left[\left(1+\sum_{s=1}^{k}\tilde{v}_s\right)^2\right] \cdot {}_k p_x . q_{x+k} - \left({}_*\ddot{a}_x\right)^2$$

VI. Implementación

En secciones anteriores se ilustra como el desarrollo de las fórmulas para los momentos de las variables aleatorias valor presente, cuando las tasas de interés son variables aleatorias, puede involucrar varias etapas. Otros posibles modelos estadísticos para X_k son:

1. Modelos autoregresivos de orden 1 (AR 1): $(X_k - \delta) = \Phi(X_{k-1} - \delta) + \varepsilon_k$
2. AR(1) y MA(1): $(X_k - \delta) - \Phi(X_{k-1} - \delta) = \varepsilon_k - \theta\varepsilon_{k-1}$
3. AR(1) en primeras diferencias: $(X_k - X_{k-1}) - \Phi(X_{k-1} - X_{k-2}) = \varepsilon_k$

puede ser objeto de similares desarrollos. La selección de un modelo adecuado para la fuerza del interés y la estimación de los parámetros son tópicos estadísticos.

El problema de construir la función de distribución de los valores presentes actuariales se mantiene. Las técnicas usadas cuando solo se consideraba K como variable aleatoria no funcionan cuando K y $\tilde{v}_k$, la sobrevida medida en años enteros y el factor de descuento, tienen una distribución conjunta.

Existen enfoques basados en simulación que permiten encarar los tres problemas de estimar los momentos de las variables aleatorias de valores presentes, aproximando la función de distribución de las pérdidas de un portafolio de riesgos asegurados, generando realizaciones de $(I_1, I_2, ..., I_n)$ para los modelos desarrollados. Si $\{I_k\}$, denota la secuencia de tasas de interés futuras aleatorias, y K, años de vida completados, se asumen independientes, una función de distribución empírica que debería aproximarse a la función de distribución de las variables de pérdida individual puede ser desarrollada en forma rutinaria.

Para ilustrar esta situación, suponga que 100 secuencias de tasas futuras de interés son generadas. Para cada una de estas secuencias una realización de la variable aleatoria K, años de vida completados, usando la función de supervivencia asumida podría ser determinada. Estos resultados pueden ser usados para calcular 100 valores muestrales de $\tilde{v}_{K+1}$. Estos valores pueden ser tratados como una muestra derivada de la distribución conjunta de K e $\{I_K\}$. La media y la varianza de estos 100 valores muestrales simulados serían estimaciones de la media y la varianza de $\tilde{v}_{K+1}$. La función de distribución empírica estimaría la función de distribución de $\tilde{v}_{K+1}$.

El proceso de simulación puede ser también usado para aproximar la función de distribución del valor presente de las pérdidas totales de un portafolio con n riesgos. En este caso, se genera un conjunto de variables aleatorias de años futuros de sobrevida K_i con i = 1,2, ……., n. Si estas variables aleatorias se asumen independientes, un conjunto de realizaciones para cada variable aleatoria K_i podría ser combinado con un escenario de intereses generados aleatoriamente para producir una muestra de resultados para el valor presente de las pérdidas totales.

Debería quedar claro porque la simulación, usando realizaciones generadas por computador de variables aleatorias que pueden ser funciones de varias variables aleatorias, se utilizan ampliamente para generar funciones de distribución empíricas. Estos usos justifican porque la simulación es una importante herramienta actuarial.

Si existe evidencia de que las variables aleatorias tiempo hasta el decremento y causa del decremento no son independientes de $\{I_k\}$, entonces la generación de realizaciones de valores presentes actuariales se vuelven más complicadas. Por ejemplo, el acto y momento de retiro de un seguro de vida o de un plan de pensión puede depender de $\{I_k\}$

VII. Modelos económicos financieros

En los modelos desarrollados antes, la selección del modelo, la estimación de los parámetros, usan datos para modelizar el funcionamiento de las inversiones en el sistema financiero. Las críticas a este procedimiento afirman que se ignora importante información disponible de los mercados de capitales en el momento actual.

Para ilustrar la variabilidad en el tiempo de las tasas al vencimiento para un tipo de instrumento, se puede recurrir a distintos instrumentos. Los cambios en el precio de los bonos en los rendimientos reflejan variaciones de los mercados en función de los eventos, aunque, por supuesto, otras inversiones pueden desplegar diferentes esquemas de rendimientos en el mismo período. Las noticias económicas no afectan los rendimientos de los distintos instrumentos de la misma manera. Incluso el mismo instrumento con diferentes vencimientos pueden exhibir variadas tasas de rendimientos.

VII.1. Información de precios y vencimientos

Para extraer la información acerca de la relación de la tasa de interés y el vencimiento, excluyendo, los factores default (imposibilidad de pago) y call (posibilidad de vencimiento anticipado a opción del que recibió el préstamo), es usual usar bonos del gobierno central.

Para ilustrar los métodos usados para resumir la relación entre las tasa de interés y las fechas de vencimiento, es necesario revisar las ideas básicas de la matemática de las finanzas. Consideramos como bono puro de descuento a aquel que paga $ 1 al vencimiento y que es transado en el mercado sin costos de transacción. Estos bonos no están expuestos al riesgo de default. Los precios de los bonos en el futuro se denotan como P(s,s+t) .Asumiremos que:

1. P(s,s) =1
2. $\lim_{t \to \infty} P(s,t) = 0$

y, si u > t, entonces P(s,t) > P(s,u)

El tercer supuesto es equivalente a asignarle un mayor valor al más cercano de dos pagos iguales.

La tasa de rendimiento para t unidades de tiempo puede ser determinada a partir del mercado actual y se vincula con un solo pago en un momento futuro particular. Los números i(s,s+t) se llaman tasas de posición en el tiempo s de un bono de período t. El nombre deriva del hecho que las tasas pueden ser determinadas en base a la situación del mercado. Las tasas de posición i(s,s+t) como función de t se llama estructura temporal de las tasas de interés en el momento s.

Las tasas a futuro son una forma alternativa de estudiar la relación entre el vencimiento y la tasa de interés. Como su nombre lo sugiere, las tasas futuras son las tasas que serán usadas para contratos que concluyen en ese período futuro. Se requerirá que tales tasas sean consistentes con las tasas de posición observadas en el mercado, esto es, que no exista posibilidad de arbitraje. La oportunidad de arbitraje existe en un mercado de capitales cuando hay dos estrategias de inversión disponibles para el mismo período de inversión tal que una estrategia brindará en condiciones de certidumbre al fin del período una mayor riqueza que la estrategia alternativa.

Para ilustrar el requerimiento de no existencia de arbitraje suponga que un inversor paga 1 unidad monetaria por un bono que vence en el tiempo s+u por un monto $\left[1+i(s,s+u)\right]^u$. Alternativamente, el inversor puede comprar un bono por un período t < u y con el dinero cobrado al vencimiento de dicho bono en s+t comprar otro que vencerá en s+u. Denotando $j(s,s+t,s+u)$ a la tasa a futuro del segundo bono en el tiempo que transcurre entre s+t y s+u, si no hay oportunidad de arbitraje, deberá cumplirse que $\left[1+i(s,s+u)\right]^u = \left[1+i(s,s+t)\right]^t.[1+j(s,s+t,s+u)]^{u-t}$

o $[1+j(s,s+t,s+u)]^{u-t} = \dfrac{\left[1+i(s,s+u)\right]^u}{\left[1+i(s,s+t)\right]^t}$

El caso especial cuando u=t+1 da

$$[1+j(s,s+t,s+t+1)] = \frac{\left[1+i(s,s+t+1)\right]^{t+1}}{\left[1+i(s,s+t)\right]^t}$$

y cuando t=0

$$j(s,s,s+1) = i(s,s+1)$$

Desarrollos repetidos de esta última relación empezando en 0 llevan a:

$$\left[1+i(s,s+t)\right]^t = [1+j(s,s,s+1)].[1+j(s,s+1,s+2)].....[1+j(s,s+t-1,s+t)]$$

El precio corriente de un bono que paga cupones de monto c al final de cada uno de los n períodos y entonces paga un valor al vencimiento de F puede ser expresado en forma consistente usando tasas de descuento de bonos, tasas de posición o tasas a futuro.

Usando tasas de descuento de bonos:

$$c\sum_{k=1}^{n} P(s,s+k)+F\ P(s,s+n)$$

Usando tasas de posición

$$c\sum_{k=1}^{n}\left[1+i(s,s+k)\right]^{-k}+F\left[1+i(s,s+n)\right]^{-n}$$

Usando tasas a futuro

$$c\sum_{k=1}^{n}\prod_{w=0}^{k-1}\left[1+j(s,s+w,s+w+1)\right]^{-1}+$$

$$F\prod_{w=0}^{n-1}\left[1+j(s,s+w,s+w+1)\right]^{-1}$$

La igualdad de estas tres fórmulas para el precio de un bono descansa en el supuesto de no arbitraje.

Aún hay otra forma de medir la relación entre las tasas de interés y el vencimiento usando tasas de posición. El conjunto de tasas de posición al tiempo s, i(s,s+k), k=0,1,2 esta dado, y el rendimiento nominal, denotado por y(s,s+m), es un conjunto de pagos de cupones artificiales que se determina como:

$$1=y(s,s+m)\sum_{k=1}^{\infty}\left[1+i(s,s+k)^{-k}\right]+\left[1+i(s,s+m)^{-m}\right] \quad \text{m=1,2,...., n}$$

El rendimiento nominal puede ser descrito como la tasa de cupón en un bono negociado a su vencimiento en un mercado con tasas de posición conocidas y sin oportunidades de arbitraje.

VIII. MODELOS ESTOCÁSTICOS

A continuación ilustramos un método para generar secuencias de rendimientos nominales. Las secuencias aleatorias generadas pueden ser inputs a simulaciones de operaciones financieras de un portafolio de seguros o de contrato de pensiones. En la practica los rendimientos nominales más que las tasas de posición o a futuro son modelizadas porque los expertos en inversiones están mas familiarizados con ellos. De esta forma es más fácil para estos expertos seleccionar un modelo y especificar los parámetros.
Asumiremos que el progreso del logaritmo de las tasas de rendimiento nominales está determinada por un modelo autoregresivo de orden uno:

$$\log[Y(t,n)]=\lambda(t,n)+(1-\Phi_n)\log[Y(t-1,n)]+\sigma_n\varepsilon_{t,n}\ ,t=0,1,2,3$$

Los términos de esa expresión se definen como se indica a continuación:

- Y(t,n) rendimiento nominal aleatorio en el tiempo t para un bono que vence en n periodos. Se asume que el tiempo presente es t =0.

- $\lambda(t,n)$=un parámetro que se considera apropiado para el período t para bonos que vencen dentro de n períodos. Si $\lambda(t,n) = \lambda_n$ la relación arriba especificada se transforma en un modelo autoregresivo estándar de orden uno [AR(1)] . El parámetro considerado $\lambda(t,n)$ puede ser ajustado para cada t de forma que no haya arbitraje o que se cumpla cualquier restricción de economía financiera que deba ser satisfecha.
- $(1-\Phi_n)$= un parámetro autoregresivo apropiado para bonos con vencimiento en n periodos. El parámetro Φ_n determina la tasa a la cual las perturbaciones previas tienden a perder efecto. Por esta razón ,el parámetro es llamado tasa de reversión media. Para tener un modelo de series de tiempo que sea estacionario, deberá cumplirse que $|1- \Phi_n|<1$
- σ_n = a la desviación estándar de los shocks aleatorios
- $\varepsilon_{t,n}$ =a una variable aleatoria con distribución N(0,1)para los bonos con n periodos hasta el vencimiento en el periodo t. Las variables aleatorias $\varepsilon_{t1,n1}$ y $\varepsilon_{t2,n2}$ son independientes si $t_1 \neq t_2$ y tienen correlaciones $\rho_{n1,n2}$ si si t_1=t2. Si n1=n2, $\rho_{n1,n2}$=1. Estamos asumiendo que los shocks contemporáneos están correlacionados.

Comentarios :

El modelo escrito que se acaba de presentar es solo uno de una amplia clase de modelos estocásticos que pueden ser adoptados. La selección del modelo y la estimación de los parámetros debería estar influenciada por las teorías de economía de las finanzas y las técnicas de análisis de datos estadísticos. Este modelo también ilustra otras opciones para modelizar las tasas de interés. Algunos de los modelos anteriores usaban $\log(1+I_k)$, la fuerza del interés aleatorio del periodo k. La fórmula desarrollada en este capítulo conlleva la transformación log Y(t,n). La transformación puede ser motivada como dispositivo para estabilizar la varianza de las observaciones o para mantener realizaciones de Y(t,n) no negativas. Esta restricción de no negatividad es vista por algunos actuarios como importante.

Los modelos tales como el planteado en este capitulo pueden ser usados para estimar las curvas del rendimiento futuro.

Si el portafolio de inversiones de interés para el actuario tiene bonos de vencimiento constante la ecuación planteada aquí podría ser usada directamente para producir secuencias generadas randomicamente de tasas de interés futuras para su uso en estudios de simulación.

Como aún no se han hecho los ajustes de los parámetros del modelo para adecuarse al criterio del actuario acerca de la tasa media de largo plazo o para forzar el requerimiento de la consistencia de mercado(por ejemplo, inexistencia de arbitrajes), el parámetro $\lambda(t,n)$ esta disponible para incorporar esta información.

Por ejemplo, el siguiente desarrollo provee una herramienta al actuario para incorporar información acerca de la tasa de rendimiento media nominal de largo plazo para acciones con vencimiento fijo n.

Sea $\lambda(t,n) = \Phi_n \log \mu_n$, que es independiente de t; podemos reescribir la relación inicial de esta sección como $\log\left[Y(t,n)\right] = \Phi_n \log \mu_n + (1-\Phi_n)\log\left[Y(t-1,n)\right] + \sigma_n \varepsilon_{t,n} \quad t = 1,2,3......$

Para facilitar los pasos subsiguientes, sea:

$$Z_t = \log\left[Y(t,n)\right],$$
$$\theta = \Phi_n \log \mu_n,$$
$$\psi = (1-\Phi_n) \quad 0<\psi<1,$$

y sustituyendo en la relación anterior $Z_t = \theta + \psi Z_{t-1} + \sigma_n \varepsilon_{t,n}$ que es un modelo AR(1) estándar. Multiplicando las ecuaciones sucesivas para Z_{t-j} por Ψ^j se obtiene

$$Z_t - \psi_{t-1} Z_{t-1} = \theta + \sigma_n \varepsilon_{t,n},$$
$$\psi.Z_{t-1} - \psi^2.Z_{t-2} = \psi.\theta + \psi\sigma_n \varepsilon_{t-1,n},$$
$$\psi^2.Z_{t-2} - \psi^3.Z_{t-3} = \psi^2.\theta + \psi^2\sigma_n \varepsilon_{t-2,n}$$

....

Acumulando esta secuencias de ecuaciones y asumiendo que t es grande tenemos $Z_t \doteq \frac{\theta}{1-\psi} + \sigma_n \sum_{j=0}^{t} \varepsilon_{t-j,n}\ \psi^j$

Haciendo exponencial esta aproximación resulta

$$\exp(Z_t) \doteq \exp\left(\frac{\theta}{1-\psi} + \sigma_n \sum_{j=0}^{t} \varepsilon_{t-j,n} \psi^j\right)$$

$$Y(t,n) \doteq \mu_n \exp\left(\sigma_n \sum_{j=0}^{t} \varepsilon_{t-j,n} \psi^j\right)$$

La variable aleatoria $\left(\sigma_n \sum_{j=0}^{t} \varepsilon_{t-j,n} \psi^j\right)$ en el exponente tiene una distribución normal con media 0 y varianza para valores grandes de t de aproximadamente $\frac{\sigma_n^2}{1-\psi^2}$.

Usando estos hechos acerca de la distribución del componente aleatorio ,y recordando la función generatriz de momentos para variables aleatorias con distribuciones normales tenemos, para valores grandes de t

$$E\left[Y(t,n)\right] \doteq \mu_n \exp\left\{\frac{\sigma_n^2}{2\left[1-(1-\Phi_n)^2\right]}\right\}$$

Si los datos o el criterio de los actuarios considera realista la existencia de una media de largo plazo para los rendimientos nominales de bonos que vencen en n periodos, los valores seleccionados de $\lambda(t.n) = \Phi_n, \log \mu_n,\ \sigma_n^2$ deberían ser consistentes con la ultima ecuación.

Además de dedicarnos a definir los parámetros para que cumplan los controles de consistencia respecto de las estimaciones de la media de largo plazo, los ajustes al parámetro λ(t,n) pueden ser realizados para ser consistentes con la condición de no existencia de arbitraje

En un mercado de capitales eficiente , las tasas observadas [i(0,n_1), i(0,n_2) ,……,i(0,n_m)] para m diferentes vencimientos no debería presentar oportunidades significativas de arbitraje.

Para desarrollar un método para ajustar curvas enteras estimadas de rendimiento para visualizar oportunidades de arbitraje se requeriría considerar varios conceptos más allá del desarrollo que haremos en este trabajo. Por ello, tomaremos únicamente bonos que vencen en un periodo n=1. Adoptando una simplificación del modelo y asumiendo que el objetivo es producir escenarios de interés de largo H periodos; el modelo es

$$\log\left[Y(t,1)\right]=\mu+\sigma_1\varepsilon_{t,1} \quad t=1,2.........,H \,.$$

Generando m secuencias de la forma ($\varepsilon_{1,1}$,$\varepsilon_{2,1}$,……, $\varepsilon_{H,1}$) compuestas de observaciones de las variables aleatorias $\varepsilon_{t,1}$, se producirían m secuencias de tasas posibles correspondientes a un único periodo futuro $\left(e^{\mu+\sigma_1\varepsilon_{1,1}},e^{\mu+\sigma_1\varepsilon_{2,1}},........e^{\mu+\sigma_1\varepsilon_{H,1}}\right)_j, j=1,2..........,m$.

Para minimizar la oportunidad de arbitraje en el momento 1 el valor de la media μ como parámetro del modelo será ajustado de forma que las tasas esperadas disponibles en el tiempo 1 no presenten tal oportunidad. Para lograr este objetivo cada uno de los m valores de $e^{\mu+\sigma_1\varepsilon_{1,1}}$ serán multiplicados por $e^{\lambda_1-\mu}$ donde λ_1 queda determinado por

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\left[1+y(0,1)\right]^{-1}\left(1+e^{\lambda_1+\sigma_1\varepsilon_{(1,1)}}\right)_j^{-1}}{m}=P(0,2)$$

Como antes, P(0,2) es el precio observado de un bono de descuento de 2 períodos. El símbolo $\left(1+e^{\lambda_1+\sigma_1 e_{(1,1)}}\right)_j^{-1}$ denota que la variable $\varepsilon_{1,1}$ proviene del escenario j.

El ajuste correspondiente a la inexistencia de no arbitraje para los otros H años en el período de planificación se determinará resolviendo sucesivamente para λ_{h-1}:

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\left[1+y(0,1)\right]^{-1}\left(1+e^{\lambda_1+\sigma_1\varepsilon_{(1,1)}}\right)_j^{-1}...........\left(1+e^{\lambda_{h-1}+\sigma_1\varepsilon_{(h-1,1)}}\right)_j^{-1}}{m}=P(0,h)$$

Donde h=2,3,………,H. Las m secuencias de la forma $\left[y(0,1),e^{\lambda_1+\sigma_1\varepsilon_{1,1}},..........,e^{\lambda_{H-1}+\sigma_1\varepsilon_{H-1,1}}\right]_j$ pueden ser usados como escenarios estocásticamente generados de tasas de interés futuras, donde a cada escenario se le asigna un peso de 1/m.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Becker,D.N 1991 "Statistical Test of the Lognormal Distribution as a basis for interest rate changes", Transactions of the Society of Actuaries XLIII:7-57

[2] Bellhouse,D.R., y Panjer, H.H.1980, "Stochastic modelling of interest rates with applications to Life Insurance", Journal of Risk and Insurance 47: 91-110

[3] Boyle,P.P. 1992 "Options and the management of financial risk". Schaumburg,I.ll.: Society of actuaries.

[4] Giacotto,C. 1986 "Stochastic Modelling of interest rates: Actuarial vs. Equilibrium Approach" Journal of Risk and Insurance 53:435-53

[5] Bowers Jr.,N.L. Gerber H.U., Hickman J.C., Jones D.A, Nesbitt C.J , 1997, Society of actuaries, "Actuarial Mathematics"

[6] Jetton,M.F. 1988 "Interest Rate Scenarios" Transactions of the Society of Actuaries XL, Part 1423-37