



UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA  
Facultad de Ciencias Económicas y de Administración  
Instituto de Estadística

## Comparación del VPA de una renta de vida a través de distintas tablas de mortalidad

Gonzalo De-Armas; Ramón Álvarez-Vaz

Noviembre, 2019

### Serie Documentos de Trabajo

DT (19/6) - ISSN : 1688-6453

Forma de citación sugerida para este documento:

**De-Armas, Gonzalo, Álvarez-Vaz, Ramón (2019). Comparación del VPA de una renta de vida a través de distintas tablas de mortalidad [en línea]. Serie Documentos de Trabajo, DT (19/6). Instituto de Estadística, Facultad de Ciencias Económicas y de Administración, Universidad de la República, Uruguay.**

## Comparación del VPA de una renta de vida a través de distintas tablas de mortalidad.

Gonzalo De-Armas <sup>1</sup> Ramón Álvarez-Vaz <sup>2</sup>;  
*Universidad de la República,*  
*Facultad de Ciencias Económicas y de Administración*  
*Departamento de Métodos Cuantitativos*  
*Instituto de Estadística*

### RESUMEN

El propósito de esta investigación es estudiar las diferencias obtenidas al evaluar el Valor Presente Actuarial (VPA) de un beneficio que se paga a los funcionarios de una institución financiera, con la cual la Universidad de la República (UDELAR) realizó un convenio. Este beneficio consiste en el pago de una renta de vida con valor \$U 463 (pesos uruguayos) actualizables por inflación. El Banco Central del Uruguay (BCU) a través de la Superintendencia de seguros, establece que para realizar la evaluación del VPA para este tipo de población objetivo, se utilice una tabla de mortalidad diferente a la publicada por el Instituto Nacional de Estadística (INE) para la población general. En esta tabla se presume que la población beneficiaria esté expuesta a una mortalidad inferior que resulta de considerar el total de la población. Sin embargo, el INE mediante la proyección de las tasas específicas de mortalidad ha construido tablas de mortalidad para el período 2012-2050, y como se puede presumir que, en el contexto de la transición demográfica, las mortalidades específicas sigan cayendo en las próximas décadas principalmente mediante la caída de las mortalidades específicas en edades avanzadas. Es por este aspecto que, si bien la tabla publicada por el BCU pueda resultar más apropiada para la población en estudio, la misma no se actualiza año a año para recoger este descenso de la mortalidad específica, como sí lo hace la del INE. Esta investigación busca comparar mediante simulación Monte Carlo la distribución empírica del VPA del beneficio mencionado aplicando tanto la tabla autorizada por el BCU con las del INE con las proyecciones del descenso de la mortalidad para los próximos años.

Palabras Clave: Renta de Vida, Tabla de Mortalidad, Transición Demográfica, Valor Presente Actuarial.

Códigos JEL: C14, C16, G22.

Clasificación MSC2010: 62P05, 97M30.

---

<sup>1</sup> *email:*gonzalo.dearmas@iesta.edu.uy, ORCID: 0000-0002-4515-0649

<sup>2</sup> *email:* ramon@iesta.edu.uy, ORCID: 0000-0002-2505-4238

## ABSTRACT

The purpose of this research is to study the differences obtained when evaluating the Actuarial Present Value (APV) of a benefit paid to the employees of a financial institution, with which Udelar made an agreement. This benefit consists of the payment of a life annuity with a value of \$463 (Uruguayan pesos), which can be restated for inflation. The Central Bank of Uruguay (BCU), through the insurance superintendence, establishes that in order to carry out the evaluation of the VPA for this type of target population, a different mortality table is used than the one published by the National Institute of Statistics (INE) for the general population. In this table it is assumed that the beneficiary population is exposed to a lower mortality than that resulting from considering the total population. However, the INE, by projecting specific mortality rates, has constructed mortality tables for the period 2012-2050, and as it can be assumed that, in the context of the demographic transition, specific mortalities will continue to fall in the coming decades mainly through the fall of specific mortalities at advanced ages. It is for this reason that, although the table published by the BCU may be more appropriate for the population under study, it is not updated year by year to reflect this decline in specific mortality, as INE does. This research seeks to compare, by means of Monte Carlo simulation, the empirical distribution of the VPA of the aforementioned benefit by applying both the table authorized by the BCU and those of the INE with the projections of the decrease in mortality for the coming years.

Keywords: Life Income, Life Table, Demographic Transition, Actuarial Present Value

Jel Code: C14, C16, G22.

Mathematics Subject Clasification MSC2010: 62P05, 97M30.

## 1. Introducción

En el contexto de un convenio realizado por la UDELAR con una institución financiera uruguaya, se encomendó calcular la reserva que con la que dicha institución debía contar al final del año en curso, para poder afrontar el pago de un conjunto de beneficios futuros. Para calcular esta reserva, la superintendencia del BCU autoriza a utilizar una tabla de mortalidad destinada específicamente a este tipo de población que esta sujeta a una mortalidad inferior que el promedio de la población uruguaya, no obstante esta tabla no se actualiza año a año utilizando proyecciones de la mortalidad por lo que se propone comparar el resultado de la reserva utilizando la tabla proporcionada por el BCU contra el uso de tablas de mortalidad proyectadas por el INE (INE, 2014), que si bien consideran una población más general, recogen la disminución de la mortalidad específica proyectada para los próximos años. Ya hay antecedentes previos donde se calculó la reserva necesaria para el pago de un beneficio único sujeto a condición de sobrevivencia de los empleados, luego de 25 años de aportes donde se encontró que no habían diferencias significativas; sin embargo, en esta investigación se propone realizar una comparación similar pero con un beneficio que implica el pago de una renta de vida vitalicia a los empleados de dicha institución. El estudio en este caso sí encontró diferencias significativas entre la distribución empírica utilizando una u otra tabla, resultando una diferencia superior al 40 % más de reserva si se consideran las proyecciones de disminución de la mortalidad específica para los próximos años.

## 2. Antecedentes

En una investigación anterior (De-Armas y Álvarez-Vaz, 2019), se estudió la diferencia obtenida en la suma de los VPA de las densidades (Figura 1), utilizando la mortalidad resultante de aplicar las tablas proyectadas por el INE y la tabla autorizada por el BCU, para un pago único sujeto a la sobrevivencia del beneficiario, en ese caso se concluyó que no existían diferencias significativas en los resultados de usar una u otra tabla.

En dicha investigación, se realizaron un conjunto de pasos previos para poder compatibilizar dichas tablas, en particular, las tablas proyectadas por el INE incluían como última edad de supervivencia a los 100 años (Figura 2), mientras que la tabla del BCU considera 110 años. Para que los resultados fueran comparables se extendieron las tablas de mortalidad proyectadas por el INE hasta una edad de 110 años, forzando a que  $l_{111}$  fuera 0 y haciendo una interpolación por *cubic splines* en los valores de  $l_x$  para una edad de 101 hasta 110 (Figura 3).

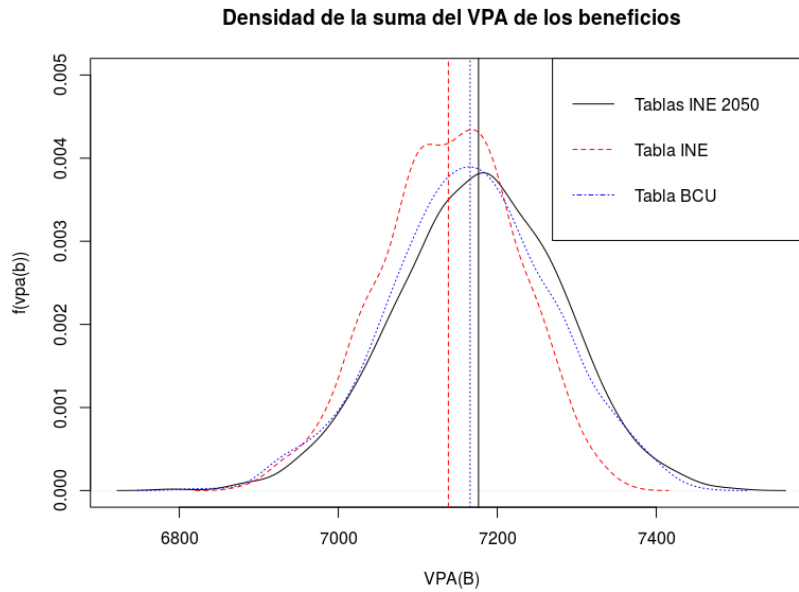


Figura 1: Comparación de la suma del VPA con pago único **Fuente. Elaboración propia**

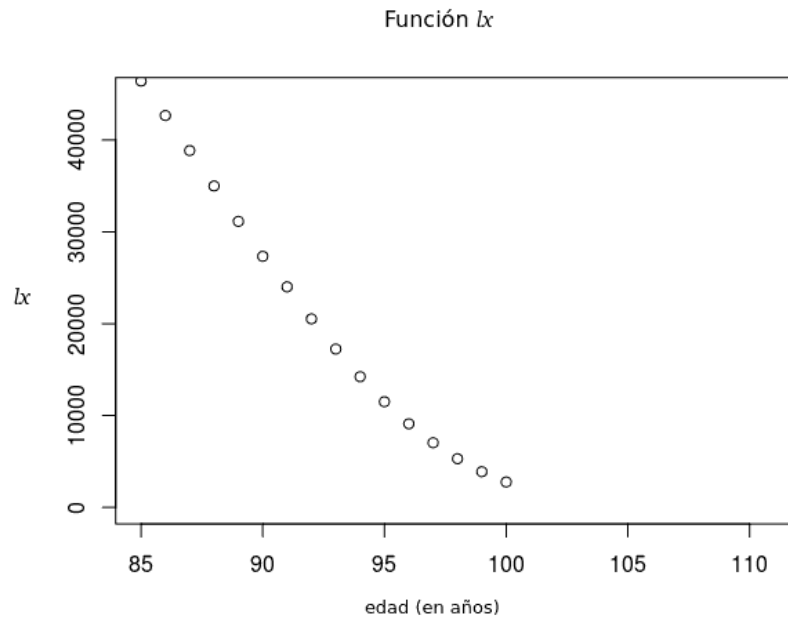


Figura 2: Datos originales en función de sobrevivencia de una tabla proyectada por INE **Fuente. Elaboración propia**

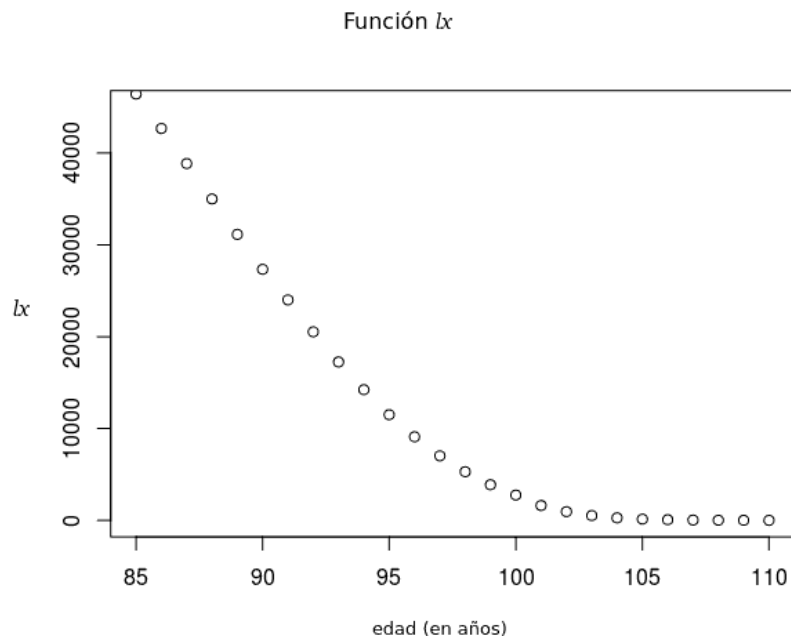


Figura 3: Proyección de una tabla INE Fuente. Elaboración propia

### 3. Marco Teórico

#### 3.1. Transición Demográfica

Se entiende por *transición demográfica* a un concepto en Demografía, que implica el tránsito de un régimen de alta mortalidad y alta fecundidad a uno de baja mortalidad y baja fecundidad descrita por (Thompson, 1929). Este proceso se desarrolla en cuatro etapas (Kirk, 1996):

1. Pretransicional: la mortalidad y la fecundidad son altas.
2. Disminución de la mortalidad, fecundidad alta: al disminuir la tasa bruta de mortalidad (TBM) inicialmente por una caída de la mortalidad infantil, pero manteniéndose alta la tasa bruta de natalidad (TBN) es que se desarrolla un fuerte crecimiento poblacional.
3. Disminución paulatina de la fecundidad: La disminución de la TBN lleva a un envejecimiento poblacional debido a la disminución del nacimiento de niños, al continuar disminuyendo la mortalidad las personas tienen la posibilidad de vivir más años y por tanto las pirámides de población cambian su estructura.

4. Posttransicional: la mortalidad y fecundidad son bajas, se detiene el crecimiento poblacional.

### 3.2. Cálculo del VPA de una renta de vida

Se define una *renta de vida* como una sucesión de pagos, con una cierta periodicidad, que se otorga a un beneficiario durante toda su vida.

Para calcular el VPA de esta cadena de pagos, debe realizarse la actualización actuarial y financiera. La actualización actuarial consiste en considerar la probabilidad de que la persona este con vida al momento de realizarse cada pago. La actualización financiera, incluye el concepto del *valor-tiempo* del dinero, calculando el valor de ese conjunto de pagos en un momento determinado del tiempo, aplicando una tasa de interés predefinida o aleatoria.

El cálculo del VPA de una renta de vida, por lo tanto, implica actualizar todos los pagos que se realizan al beneficiario, a condición de que el mismo este con vida, al momento de evaluación de renta (Bowers *et al.*, 1997):

$$VPA = \sum_{t=1}^{\omega-x-1} B \frac{l_{x+t}}{l_x} (1+i)^{-t} \quad (1)$$

Como esta renta de vida tiene una cantidad aleatoria de cuotas a pagar, dependiente de la edad de muerte del beneficiario, es que el *VPA* es una variable aleatoria cuya esperanza se calcula según la ecuación (1)

Una alternativa que ofrece mayor información es obtener e identificar la distribución empírica del VPA mediante simulación.

## 4. Metodología

Se aplica el método de simulación Monte Carlo implementando las rutinas de cálculo a través del software (R Core Team, 2019) para determinar la edad de fallecimiento de cada beneficiario. La suma de los VPA consiste, en realizar la actualización financiera de los pagos que cada uno de los beneficiarios recibirá hasta el momento de su muerte.

Como se trata de una simulación y para que la misma muestre resultados estables, se realizan 10000 iteraciones, obteniéndose una suma de VPA en cada de ellas. Este resultado permite obtener la distribución empírica de la suma de los VPA.



En cuanto al beneficio pautado, si bien el mismo se paga en pesos uruguayos, a efectos de recoger el efecto de la inflación se lo convirtió a unidades indexadas y se aplicó una tasa en unidades indexadas <sup>3</sup>.

Para poder utilizar las tablas proyectadas por INE hasta el 2050 para simular la edad hasta la cual sobrevive cada empleado, se utiliza para cada año la probabilidad de supervivencia de una persona de edad  $x$  hasta la edad  $x + 1$  en el año  $t$ .

Finalmente se determina mediante el *Akaike Information Criterio* (AIC) cuál es la distribución que mejor ajusta a las distribuciones empíricas usando funciones de la librería *gamlss*, (Rigby y Stasinopoulos, 2005) obtenidas según la tabla de mortalidad utilizada.

$$AIC(k) = -2\ln(L(\hat{\theta}(k))) + 2k \quad (2)$$

buscándose aquellas distribuciones que presenten un menor AIC.

Sin embargo como este criterio no determina si el ajuste es bueno, se procede a hacer pruebas de bondad de ajuste para las distribuciones candidatas a ajustar a las distribuciones empíricas que se obtuvieron (Díaz, 2011).

## 4.1. Pruebas de Bondad de Ajuste

Dadas las características del cálculo, y aplicando la ley de los grandes números donde la suma de los VPA de todos los beneficiarios se distribuiría normal se plantea hacer las siguientes pruebas de bondad de ajuste:

### 4.1.1. Test Shapiro Wilk

Se utiliza para contrastar la normalidad de una muestra de datos, plantea como hipótesis que los datos se distribuyen en forma normal y busca evidencia de que esto no se cumpla.

$$W = \frac{(\sum_{i=1}^n a_i x_{(i)})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (3)$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{m}'V^{-1}}{(\vec{m}'V^{-1}V^{-1}\vec{m})^{\frac{1}{2}}} \quad (4)$$

---

<sup>3</sup>La unidad indexada es una unidad de valor que se reajusta según el valor del índice de precios al consumo (INE, Unidad Indexada)

Siendo  $\vec{m}$  los valores medios del estadístico ordenados que responden a una distribución normal y  $V$  su matriz de varianzas y covarianzas.

$W$  está acotado en el intervalo (0,1) y se rechaza la hipótesis nula si  $W$  es demasiado pequeño. (Shapiro *et al.*, 1968)

#### 4.1.2. Test Jarque-Bera

Al igual que el test Shapiro Wilk, el test Jarque-Bera se utiliza para analizar la normalidad de los datos (Cromwell, 1994).

Este test se especializa en detectar si la muestra de datos tiene una curtosis y asimetría consistente con una distribución normal.

$$JB = \frac{n - k + 1}{6} \left( S^2 + \frac{1}{4}(C - 3)^2 \right) \quad (5)$$

siendo:

$$S = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{\left( \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \quad (6)$$

$$C = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{\left( \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right)^2} \quad (7)$$

Bajo la hipótesis de normalidad, JB se distribuye Chi-Cuadrado con dos grados de libertad.

#### 4.1.3. Test de curtosis para normalidad

Se entiende como curtosis o apuntamiento de una variable aleatoria, al grado de concentración respecto a la media y las colas de la distribución, para el cual define entonces como coeficiente de curtosis al cuarto momento con respecto a la media:

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{\left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right)^2} \quad (8)$$

Bajo normalidad cierta, se espera que  $\mu_4 = 3\sigma^4$  por lo tanto bajos valores de  $\beta_2$  próximos a 3, no rechazarían la hipótesis de normalidad de los datos (David *et al.*, 1954), (Anderson y Darling, 1954), (Shapiro *et al.*, 1968).

#### 4.1.4. Test de Skewness para normalidad

Se entiende por *Skewness* a la simetría que presenta una distribución respecto a su media. El coeficiente de *Skewness* es un valor que cuanto más cerca de 0 se encuentre, mayor simetría presentará la distribución.

$$SW = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right)^{3/2}} \quad (9)$$

Como la distribución normal es una distribución simétrica, valores de SW próximos a 0 no rechazarían la normalidad de los datos (Shapiro y Wilk, 1965),.

#### 4.1.5. Test de Kolmogorov Smirnov para dos muestras

Se utiliza para probar que dos muestras independientes provienen de una misma población donde la hipótesis que se plantea es que las diferencias observadas en ambas muestras son suficientemente pequeñas como para no rechazar esta idea.

$$D = \max |F_{n_1}(x) - F_{n_2}(x)| \quad (10)$$

Si  $D$  es pequeño significa que no se encuentran grandes diferencias en la función de distribución de ambas muestras y, por lo tanto, no se rechaza la hipótesis.

## 5. Resultados

Se presenta a continuación en la Tabla 1, medidas de resumen descriptivas del resultado de la suma de los VPA de los beneficios usando una u otra tabla de mortalidad:

Tabla	Mínimo	1er Cuartil	Mediana	Media	3er Cuartil	Máximo	Desvío
Tablas INE	14483	15227	15473	15463	15652	16376	281
Tabla BCU	11425	12093	12290	12289	12485	13115	292

Tabla 1: Medidas de resumen de la suma de los VPA

Si se observa la Figura 4 puede concluirse que las diferencias son importantes, con una diferencia en la media de las distribuciones empíricas del 15,7%, también se aprecia que la forma de ambas distribuciones sugiere no solo la normalidad de los datos resultantes, sino que las dos distribuciones representan un corrimiento en media de una respecto a la otra.

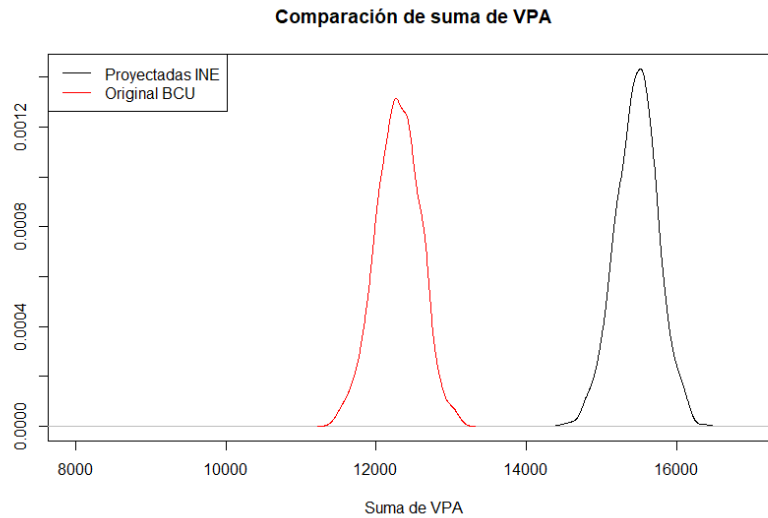


Figura 4: Comparación de la densidad empírica de la suma de VPA **Fuente. Elaboración propia**

## 5.1. Pruebas de bondad de ajuste

### 5.1.1. VPA utilizando proyección de tablas INE

La Tabla 2 detalla los resultados de aplicar los test de bondad de ajuste Shapiro Wilk, Jarque-Vera así como curtosis y simetría:

Prueba	Estadístico	P-Valor
Shapiro-Wilk	W=0,99854	0,583
Skewness test	T = -0,10458	0,1895
Kurtosis test	T = 3,0618	0,6825
Jarque-Bera	JB = 1,9822	0,355

Tabla 2: Test de Normalidad para la suma de VPA

Como el p-valor en todos los test es superior a 5% se puede concluir que no se rechaza la hipótesis de normalidad de la distribución empírica de la suma de los VPA.

$$\sum VPA \sim N(15463, 281) \quad (11)$$

### 5.1.2. VPA utilizando proyección de tabla BCU

Aplicando los mismos tests usando las proyecciones del INE, se obtuvieron los resultados listados en la Tabla 3

Prueba	Estadístico	P-Valor
Shapiro-Wilk	W = 0,99806	0,3093
Skewness test	T = -0,080572	0,316
Kurtosis test	T = 2,8913	0,466
Jarque-Bera	JB = 1,5746	0,4385

Tabla 3: Test de Normalidad para la suma de VPA

Por lo tanto también se concluye que la distribución empírica de la suma de los VPA utilizando la tabla de mortalidad autorizada por el BCU se distribuye normal.

$$\sum VPA \sim N(12289, 292) \quad (12)$$

## 5.2. Pruebas de Diferencia de Distribuciones

Se realiza un test de Kolmogorov-Smirnov para dos muestras con el siguiente resultado:

$$\begin{cases} H_o: & \text{Las distribuciones coinciden.} \\ H_a: & \text{Las distribuciones son diferentes.} \end{cases}$$

Estadístico de contraste: D=1

P-Valor < 2,2 x 10<sup>-16</sup>

Por lo tanto se rechaza la igualdad de distribuciones.

No obstante, se ha probado que las distribuciones no responden a la misma media y varianza. Queda la interrogante de si la distribución de la suma de VPA utilizando las tablas proyectadas por el INE, son un corrimiento en media respecto al resultado obtenido mediante el uso de la tabla autorizada por el BCU. Es por esto que se resta la diferencia de media entre ambas distribuciones y se repite el test.

$\left\{ \begin{array}{l} H_o: \text{ Las distribuciones coinciden.} \\ H_a: \text{ Las distribuciones son diferentes.} \end{array} \right.$   
 Estadístico de contraste:  $D=0,04$   
 P-Valor = 0,4005

Por lo tanto, no se rechaza que la distribución de la suma de los VPA utilizando las tablas proyectadas por el INE sea un corrimiento en media respecto a la tabla proyectada por el BCU.

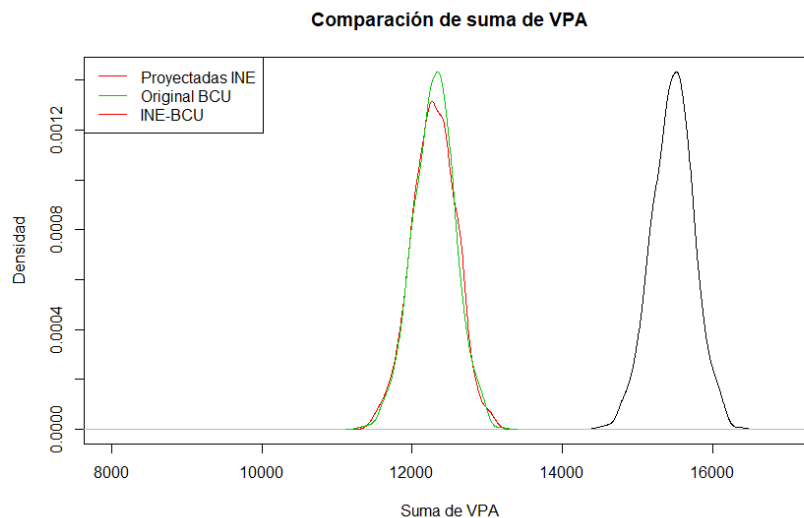


Figura 5: Densidad de la suma de VPA incluyendo corrimiento en media **Fuente. Elaboración propia**

## 6. Conclusiones

Cuando se calculó la suma de los VPA, de un único beneficio a pagar a un conjunto de personas, no se encontraron diferencias significativas al 5 % al utilizar la tabla del mortalidad que el BCU autoriza para este conjunto de beneficiarios y el uso de las tablas INE, para la población general, con proyección de mortalidad. Sin embargo, al realizar el mismo cálculo para un beneficio a cobrar mediante una renta vitalicia, se encontraron diferencias significativas, que resultan en un aumento del 25,8 % si se considera la proyección de las tasas específicas de mortalidad.

Esta diferencia en la reserva es muy grande como para no plantearse el considerar utilizar estas tablas de mortalidad dinámicas, con el objetivo de que la institución pueda hacer frente a los pagos futuros de los beneficios acordados.

Es presumible que si se proyecta la tabla de mortalidad del BCU se puedan obtener resultados de la suma del VPA aun más grandes que los obtenidos con las tablas proyectadas por el INE dado que éstas últimas recogen la mortalidad de la población en general.

## **7. Trabajos a futuro**

Debido a la importancia de la temática y buscando la mayor precisión posible en la estimación de la reserva, se plantea proyectar la tabla de mortalidad autorizada por la Superintendencia de seguros del BCU, de manera de recoger la disminución de la mortalidad específica en este tipo de población objetivo.

## Referencias Bibliográficas

- Anderson, T. W. y Darling, D. A. (1954). 'A test of goodness of fit. *J. Amer. Stat. Assn.*, 49:765.
- Bowers, Gerber, Hickman, Jones, y Nesbitt (1997). *Actuarial mathematics*. SOA.
- Cromwell, J. (1994). *Univariate tests for time series models*. Sage Publications, Thousand Oaks, Calif.
- David, H., Hartley, H., y Pearson, E. S. (1954). The distribution of the ratio, in a single normal sample, of range to standard deviation, *Biometrika*, 41:482.
- De-Armas, G. y Álvarez-Vaz, R. (2019). Aplicación de diferentes tablas de mortalidad para el cálculo del valor presente actuarial. Documento de Trabajo Serie DT (19/ 05) - ISSN : 1688-6453, IESTA.
- Díaz, F. F. C. (2011). *Selección de modelos mediante criterios de información en análisis factorial. Aspectos teóricos y computacionales*.
- INE (2014). Estimaciones y proyecciones de la población de Uruguay: metodología y resultados. Revisión 2013.
- Kirk, D. (1996). Demographic Transition Theory.
- R Core Team (2019). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.
- Rigby, R. A. y Stasinopoulos, D. M. (2005). Generalized additive models for location, scale and shape,(with discussion). *Applied Statistics*, 54:507–554.
- Shapiro, S., Wilk, M., y Chen, H. (1968). A comparative study of various test for normality. *Journal of the American Statistical Association*, 63.
- Shapiro, S. y Wilk, M. B. (1965). An analysis of variance test for normality (complete samples),. *Biometrika*, 52:591.
- Thompson, W. (1929). Population. *American Journal of Sociology*.



Instituto de Estadística

---

Documentos de Trabajo



**Eduardo Acevedo 1139. CP 11200 Montevideo, Uruguay**

**Teléfonos y fax: (598) 2410 2564 - 2418 7381**

**Correo: [ddt@iesta.edu.uy](mailto:ddt@iesta.edu.uy)**

**[www.iesta.edu.uy](http://www.iesta.edu.uy)**

**Área Publicaciones**

**Diciembre, 2019**

**DT (19/6)**