



UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
Facultad de Ciencias Económicas y de Administración
Instituto de Estadística

Aplicación de diferentes tablas de mortalidad para el cálculo del Valor Presente Actuarial

Gonzalo De Armas; Ramón Álvarez-Vaz

Octubre, 2019

Serie Documentos de Trabajo

DT (19/5) - ISSN : 1688-6453

Forma de citación sugerida para este documento:

De-Armas, Gonzalo, Álvarez-Vaz, Ramón (2019). Aplicación de diferentes tablas de mortalidad para el cálculo del Valor Presente Actuarial [en línea]. Serie Documentos de Trabajo, DT (19/5). Instituto de Estadística, Facultad de Ciencias Económicas y de Administración, Universidad de la República, Uruguay.

Aplicación de diferentes tablas de mortalidad para el cálculo del Valor Presente Actuarial.

Gonzalo De Armas ¹ Ramón Álvarez-Vaz ²;
Universidad de la República,
Facultad de Ciencias Económicas y de Administración
Departamento de Métodos Cuantitativos
Instituto de Estadística

Resumen

En el contexto de un convenio realizado con una institución financiera uruguaya, se plantea el análisis del cálculo actuarial del valor presente de un beneficio a otorgarse a sus empleados bajo la condición de aportación durante 25 años a una caja colectiva. La normativa actual exige que para el cálculo del valor presente actuarial del beneficio se utilice una tabla de mortalidad autorizada por la superintendencia del Banco Central del Uruguay (BCU). En la presente investigación se plantea analizar que sucedería con dicho valor presente si en lugar de utilizar dicha tabla se utiliza la tabla proporcionada por el Instituto Nacional de Estadística (INE) para la población general como también usar las proyecciones de mortalidad hechas por el INE hasta el 2050, para determinar si hay cambios relevantes en la reserva que debería tener dicha institución financiera con la finalidad de hacer frente a estas obligaciones. Se entiende que la tabla de mortalidad del BCU se aproxima mejor a las probabilidades de fallecimiento dadas las características de sus afiliados a la caja, que utilizar una tabla para población general proporcionada por el INE, sin embargo las tablas proyectadas por el INE incluyen en sus cálculos las proyecciones de aumento de la probabilidad de sobrevivida de las personas en general. Para trabajar con tablas comparables es que previo a realizar los cálculos actuariales por métodos de simulación Monte Carlo, se utilizan la técnica de interpolación a fin de extender las tablas de mortalidad publicadas por el INE, para que incluyan como edad máxima de sobrevivida los 110 años, en lugar de los 100 años originales. Se obtuvo como resultado que la distribución de la suma del VPA de los beneficios utilizando la tabla del BCU no presenta diferencias relevantes respecto al uso de tablas proyectadas por el INE en cambio presenta diferencias al utilizar una tabla única para el año en curso.

Palabras clave: Interpolación, Tabla de Mortalidad, Simulación, Valor Presente Actuarial.

Códigos JEL: C14, C16, C41, G23, J11

Clasificación MSC2010: 62P05, 97M30

¹ *email:* gonzalo.dearmas@iesta.edu.uy, ORCID: 0000-0002-4515-0649

² *email:* ramon@iesta.edu.uy, ORCID: 0000-0002-2505-4238

Abstract

In the context of an agreement with a Uruguayan financial institution, the analysis of the actuarial calculation of the present value of a benefit to be granted to its employees under the condition of contribution for 25 years to a collective fund was raised. The current regulations require a mortality table authorized by the Division of Supervision and Regulation of the Central Bank of Uruguay (BCU), to be used to calculate the actuarial present value of the benefit. In the present investigation, it is proposed to analyze what would happen to this present value if instead of using the said table, the table provided by the National Institute of Statistics (INE) for the general population is used as well as using the mortality projections made by the INE up to 2050. The purpose is to determine whether the financial institution requires relevant changes in the reserve in order to meet these obligations. It is understood that the Central Bank of Uruguay (BCU) mortality table better approximates the probabilities of death given the characteristics of its affiliates to the box, than using a table for the general population provided by the INE. However, the tables projected by the INE include in their Calculations projections of increase in the probability of survival rates of people in general. To work with comparable tables is that prior to performing the actuarial calculations by Monte Carlo simulation methods, the interpolation technique is used in order to extend the mortality tables published by the INE, so that they include 110 years of age as the maximum age of survival, instead of the original 100. As a result, it was obtained that the distribution of the sum of the present actuarial value of the benefits using the Central Bank (BCU) table does not introduce significant differences with respect to the use of tables projected by the INE. On the other hand, it presents differences when using a single table for the current year.

Key Words: Actuarial Present Value, Interpolation, Mortality Table, Simulation,

JEL Code: C14, C16, C41, G23, J11

Mathematics Subject Classification MSC2010: 62P05, 97M30

1. Introducción

En el contexto de un convenio realizado con una institución financiera uruguaya, se analizó el pasivo con que este organismo debía contar para hacer frente a obligaciones futuras contraídas con sus empleados y afiliados a la caja colectiva de dicha institución (CC).

Las obligaciones evaluadas son las que se usan para el pago de una prestación de 25 unidades reajustables al cumplir 25 años de aportes a la mencionada caja colectiva.

Para esto se utiliza la tabla de mortalidad indicada en la normativa de la superintendencia del Banco Central del Uruguay (BCU), además de otros supuestos respecto al crecimiento salarial y a la tasa de interés aplicada, información que fue proporcionada por la institución financiera.

Los resultados obtenidos al realizar 100, 200, 500 y 1000 simulaciones Monte Carlo del valor presente actuarial (VPA) de la suma de todos pagos de este beneficio al 31/12/2017 se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1: Simulaciones usando tablas según normativa del BCU

# Simulaciones	Min.	1er Cuartil	Mediana	Media	3er Cuartil.	Max.
100	6932	7095	7184	7173	7245	7387
200	6906	7103	7170	7167	7239	7387
500	6906	7101	7165	7168	7238	7446
1000	6816	7097	7165	7165	7235	7446

Los objetivos de esta investigación son:

Extender las tablas de mortalidad proyectadas por el INE hasta el 2050, para un valor de ω de 111.

Caracterizar la distribución empírica del VPA de la suma de los beneficios utilizando las tablas proyectadas por el INE.

Analizar las diferencias obtenidas como resultado de aplicar las tablas del Instituto Nacional de Estadística (INE), tanto en el caso de tabla única como las proyecciones a 2050 (INE, 2014) para los beneficios calculados en el convenio.

2. Marco Téorico

2.1. Transición demográfica

Uruguay, así como también el resto de los países de latinoamerica están inmersos en lo que se denomina en demografía, la transición demográfica, esta se caracteriza por ser un proceso que comienza con tasas de mortalidad y natalidad altas para en su final terminar con tasas de mortalidad y natalidad bajas. (Rofman *et al.*, 2016).

La transición demográfica ocurre en un conjunto de etapas (Kirk, 1996)

- una primera etapa pretransicional donde tanto la mortalidad como la fecundidad se caracterizan por tener valores elevados.
- una segunda etapa donde la mortalidad cae abruptamente mientras que la fecundidad permanece alta.
- una tercera etapa en la que la fecundidad cae y genera un envejecimiento de la población producto de que las personas tienen una mayor expectativa de vida pero la cantidad de nacimientos disminuye
- finalmente una etapa final post-transición donde tanto la mortalidad como la fecundidad están a valores bajos y el volumen de población se mantiene constante.

La Figura 1 muestra la evolución de la transición demográfica en Uruguay, actualmente el Uruguay se encuentra en una etapa avanzada dicha transición con tasas brutas de mortalidad (TBM) y de natalidad (TBN) bajas, se prevé que la población uruguaya crezca hasta pasado el año 2050 para luego disminuir. El pronóstico de un leve aumento de la TBM no se vincula a que aumente la probabilidad de fallecimiento, sino que, debido a la disminución de la TBN la proporción de ancianos aumente respecto a la población en general.

La Figura 2 permite comparar la situación de Uruguay respecto al África Subsahariana, siendo que esta última se encuentra en fases iniciales de la transición donde se aprecia un descenso de la TBM pero los valores de la TBN permanecen elevados.

Finalmente la Figura 3 muestra la situación del mundo en su conjunto, se prevé que el mundo termine la transición demográfica aproximadamente en el año 2100, alcanzando los 11.000 millones de habitantes para estabilizarse en esa cantidad (Lam, 2017).

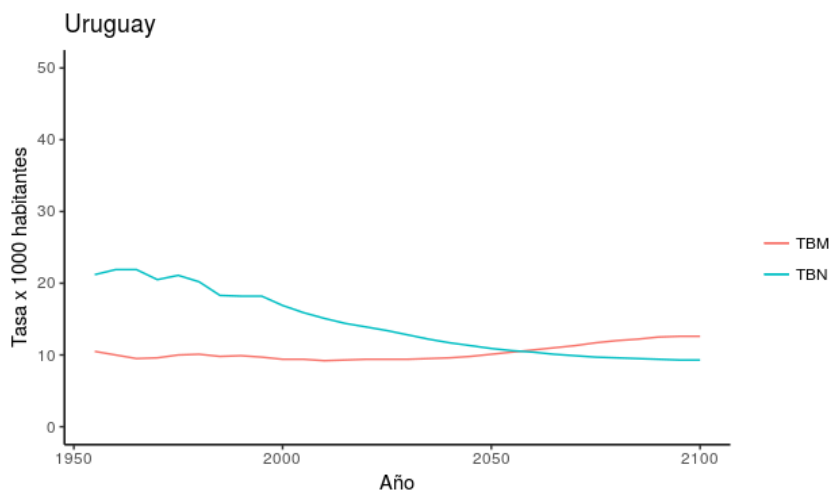


Figura 1: Evolución de las TBN y TBM para el Uruguay: Fuente: Elaboración propia a partir de: United Nations, Department of Economic and Social Affairs, Population Division (2017). World Population Prospects: The 2017 Revision, custom data acquired via website.

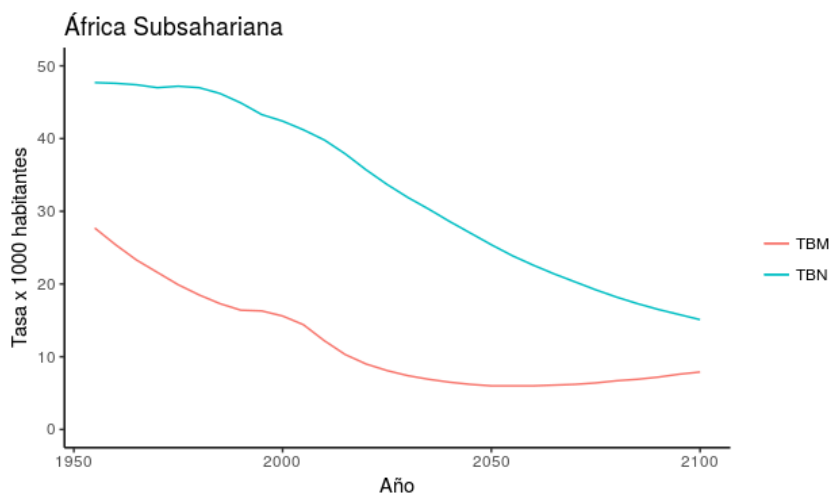


Figura 2: Evolución de las TBN y TBM para el África Subsahariana: Fuente: Elaboración propia a partir de: United Nations, Department of Economic and Social Affairs, Population Division (2017). World Population Prospects: The 2017 Revision, custom data acquired via website.

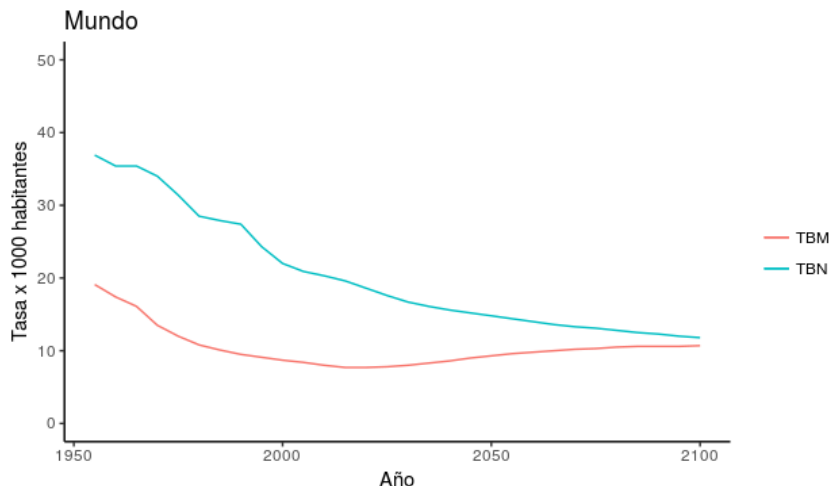


Figura 3: Evolución de las TBN y TBM para el mundo Fuente: **Elaboración propia a partir de: United Nations, Department of Economic and Social Affairs, Population Division (2017). World Population Prospects: The 2017 Revision, custom data acquired via website.**

Como resultado del descenso de la TBM ocurre un aumento de la expectativa de vida de la población, en la Figura 4 se puede observar como ha evolucionado en el Uruguay la esperanza de vida al nacer y su proyección hasta el año 2100.

2.2. Valor presente actuarial del beneficio

Para garantizar el pago de obligaciones adquiridas por la institución, el valor presente actuarial de los pagos a cobrar debe ser equivalente al valor presente actuarial de los beneficios a pagar.

El cálculo del valor presente actuarial de los beneficios se obtiene actualizando financieramente el valor de los beneficios al momento actual (Bowers *et al.*, 1997), este beneficio, para cada empleado, puede valer 0 si no se cumplen las condiciones de cobro, o b si se cumplen.

$$VPA(B) = \sum_{i=1}^N \frac{b_{k+1} P(K(x) > k)}{(1+i)^{k+1}} \quad (1)$$

Siendo:

- B el conjunto de todos los beneficios futuros a pagar.

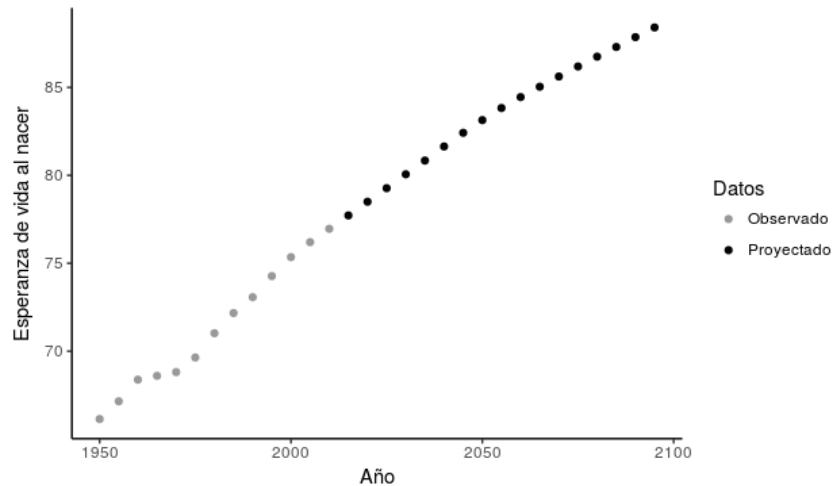


Figura 4: Esperanza de vida al nacer para el Uruguay Fuente Elaboración propia a partir de: United Nations, Department of Economic and Social Affairs, Population Divisi

- $K(x)$ el tiempo de vida que le resta por vivir a una persona de edad x medido en años enteros.
- N la cantidad de personas incluidas en el beneficio.
- i la tasa de interés aplicada.
- k los años que restan para alcanzar los 25 años de aportes, sujeto a la condición de que $k > 0$ y que sea inferior al tiempo restante para obtener la edad máxima de jubilación.

2.3. Interpolación mediante cerchas cúbicas (Cubic Splines)

La técnica de interpolación denominada *cubic spline* (cerchas cúbicas en español) es utilizada para interpolar un conjunto de puntos mediante la superposición de polinomios de tercer grado que cumplan las condiciones de continuidad y derivabilidad de segundo orden.

En el contexto de esta investigación se aplicará esta técnica para extender tablas de mortalidad que tienen una edad máxima de 100 años, hasta los 110 años, mediante el supuesto de que l_{111} es igual a 0.

Supongamos que se tienen un conjunto de $N + 1$ puntos x_k ordenados y sus correspondientes valores funcionales $f(x_k)$

Sea una función $s(x)$ en el intervalo $[x_0, x_n]$, se buscan entonces polinomios de tercer grado de tal manera que $S(x) = S_k(x)$ en el intervalo $[x_k, x_{k+1}]$ que interpolen a la función $f(x)$ en dicho intervalo, cada uno de estos polinomios tendrá coeficientes $s_{k,0}, s_{k,1}, s_{k,2}, s_{k,3}$:

$$S(x_k) = S_k(x) = s_{k,0} + s_{k,1}(x - x_k) + s_{k,2}(x - x_k)^2 + s_{k,3}(x - x_k)^3 \quad (2)$$

Si se cumple que :

- $S_k(x_k) = f(x_k)$

con $k = 1, 2, \dots, n - 1$

- $S_k(x_{k+1}) = S_{k+1}(x_{k+1})$

- $S'_k(x_{k+1}) = S'_{k+1}(x_{k+1})$

- $S''_k(x_{k+1}) = S''_{k+1}(x_{k+1})$

con $k = 1, 2, \dots, N - 2$

Entonces a la función $s(x)$ se la denominará *spline cúbico*

Además para que existan estos splines cúbicos debe verificarse que :

$$h_{k-1}m_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k)m_k + h_k m_{k+1} = u_k \quad (3)$$

siendo:

$$m_j = S''(x_j)$$

$$h_j = x_{j+1} - x_j$$

$$d_j = \frac{y_{j+1} - y_j}{h_j}$$

$$u_j = 6(d_j - d_{j-1}) \text{ para } j = 1, 2, \dots, N - 1$$

2.3.1. Construcción de los splines cúbicos interpoladores

Los valores m_k son incógnitas en la ecuación (3) y los demás términos se obtienen a partir de los datos (x_k, y_k) . La ecuación (3) es por tanto un sistema de $N - 1$ ecuaciones con $N + 1$ incógnitas.

Para que este sistema tenga solución única se deben añadir dos ecuaciones más llamadas restricciones en los extremos. Habitualmente estas dos ecuaciones extras permiten obtener el m_0 en la primera ecuación y el m_N en la última.

Existen varias estrategias para imponer restricciones en los extremos, si especificamos $m_0 = S'''(x_0)$ y $m_N = S'''(x_N)$ entonces podemos calcular $h_0 m_0$ y escribir la ecuación (3) para $k = 1$ de la siguiente manera:

$$2(h_0 + h_1)m_1 + h_1 m_2 = u_1 - h_0 m_0 \quad (4)$$

Análogamente si fijamos m_N resulta que:

$$h_{N-2} m_{N-2} 2(h_{N-2} + h_{N-1})m_{N-1} = u_{N-1} - h_{N-1} m_N \quad (5)$$

Las ecuaciones (4) y (5) junto a las ecuaciones que se incluyen en (3) forman un sistema de $N - 1$ ecuaciones con $N - 1$ incógnitas m_j con $j = 1..N - 1$.

Más allá de la estrategia utilizada para obtener m_0 y m_N podemos escribir las ecuaciones derivadas de (2) de manera que el sistema para las incógnitas m_j sea un sistema lineal tridiagonal $HM = V$ dado por:

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & & \\ a_1 & b_2 & c_2 & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & a_{N-3} & b_{N-2} & c_{N-2} \\ & & & & a_{N-2} & b_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{N-2} \\ m_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{N-2} \\ v_{N-1} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Una vez calculados los coeficientes m_j y los coeficientes del spline $s_{k,i}$ para el trozo del spline $S_k(x)$ se obtienen de las fórmulas:

$$\begin{aligned} s_{k,0} &= y_k \\ s_{k,1} &= d_k - \frac{h_k(2m_k + m_{k+1})}{6} \\ s_{k,2} &= \frac{m_k}{2} \\ s_{k,3} &= \frac{m_{k+1} - m_k}{6h_k} \end{aligned} \quad (7)$$

Para de esta forma obtener la interpolación de la función objetivo mediante splines cúbicos. (Mathews y Fink, 2000)

3. Metodología

3.1. Datos disponibles

Tabla de datos de los empleados de dicha institución al 31/12/2017.

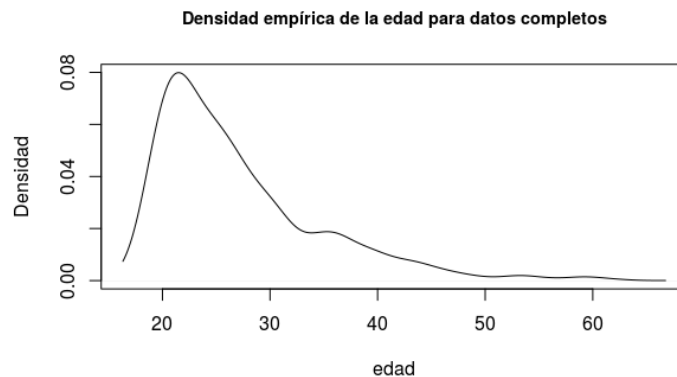


Figura 5: Densidad de las edades de los empleados: Fuente: Elaboración propia a partir de los datos proporcionados por la institución financiera.

- Base de datos de los afiliados a la Caja Colectiva.
- Tabla de mortalidad indicada por la normativa del BCU.
- Tabla de mortalidad para la población uruguaya, proyectada por el INE, año a año, hasta el 2050.

3.2. Extensión de la tabla de mortalidad a 110 años

Las tablas proporcionadas tienen un valor de l_x positivo hasta los 100 años, para utilizar la técnica de splines se fuerza a que la función l_x tome valor 0 para $x = 111$ y se aplica la técnica para los valores de l_x con $x \geq 85$

Dado que la función l_x debe ser positiva y no creciente, es que el ajuste por splines se realizó sobre una función $f(x)$ tal que $f(x) = -\log(l_x)$

Una vez obtenidos los ajustes por splines se obtuvo el valor funcional p de para valores de x en el intervalo de 100 a 110 y se aplica e^{-p} para obtener los valores de l_x en dicho intervalo.

Finalmente y dada la necesidad de tener la mortalidad en intervalos de tiempo mensuales, se realizó una interpolación lineal de los valores de la función l_x .

3.3. Simulación

En el contexto de esta investigación se realizan Simulación Monte Carlo para determinar la edad de fallecimiento de cada afiliado para de esta manera determinar si le corresponde cobrar el beneficio y el momento de pago del mismo.

3.4. Cálculo del valor presente actuarial de los beneficios

Se opta por obtener una distribución de probabilidad para la suma de los VPA de los beneficios mediante simulación Monte Carlo.

Se utilizan las tablas de mortalidad proyectadas, de tal manera que q_x sea la probabilidad de que una persona de edad x fallezca en el correr del año actual, de esta forma se determinaron las probabilidades de que una persona de x fallezca en el año 2018, si sobrevive se considera que la persona alcanzó la edad $x + 1$ y se calcula la probabilidad de fallecer en el año 2019, se repite este procedimiento análogamente hasta alcanzar los 25 años de trabajo o la edad de jubilación. Finalmente con estas probabilidades calculadas, se simula la edad de fallecimiento del afiliado.

Tabla 2: Tablas de mortalidad proyectadas, por año según edad en meses

Edad en meses	l_x						
	2016	2017	2018	...	2048	2049	2050
0	100000	100000	100000	...	100000	100000	100000
1	99936	99937	99938	...	99958	99958	99959
2	99873	99874	99876	...	99915	99916	99917
3	99809	99812	99814	...	99873	99874	99876
4	99746	99749	99752	...	99830	99832	99835
:	:	:	:	...	:	:	:
1315	3	3	4	...	5	5	5
1316	3	3	3	...	4	4	4
1317	3	3	3	...	4	4	4
1318	2	3	3	...	4	4	4
1319	2	2	2	...	3	3	3

Una vez determinado el momento del pago del beneficio, si corresponde, se hace la actualización financiera al 31/12/2017 y se repite el procedimiento para todos los empleados, realizando una acumulación de cada uno de los beneficios individuales.

Se repite el procedimiento de simulación hasta obtener resultados razonablemente estables, mostrando convergencia en media y cuantiles de la distribución en el muestreo.

3.5. Identificación de la distribución

Se determina mediante el criterio del AIC (Criterio de información de Akaike) cuál es la distribución candidata a modelar los datos, dado un conjunto de modelos candidatos el elegido será el de menor AIC.

$$AIC(k) = -2\ln(L(\hat{\theta}(k))) + 2k \quad (8)$$

Siendo k la cantidad de parámetros a evaluar, $L(\theta(k))$ es la función de verosimilitud de las observaciones y $\hat{\theta}(k)$ es la estimación máximo verosímil de θ .

Dado que el criterio del AIC no es en realidad una prueba de hipótesis, el modelo de distribución de menor AIC aún podría no ajustar correctamente a los datos, es por ello que se realiza una prueba de bondad de ajuste al modelo que resulte candidato por el criterio del AIC. (Díaz (2011))

4. Resultados

4.1. Tabla de Mortalidad a 110 años

Dadas las tablas proyectadas por el INE hasta 2050, cuyo ω es igual a 101, se aplicó la técnica de Splines a cada una de ellas, de manera de extenderlas considerando un ω igual a 111. En la Figura 6 puede apreciarse los valores originales de la función l_x para mujeres en el año 2018, con la restricción de un valor igual a 0 en 111, la Figura 7 es el resultado a aplicar la técnica de Splines y calcular los valores funcionales para las edades comprendidas entre 101 y 110.

Como resultado la Tabla 3 muestra los valores obtenidos para la función l_x para el 2018.

4.2. Simulación del VPA del beneficio

Utilizando el software R (R Core Team, 2017) mediante iteración se realizaron de 100 simulaciones de la suma de los VPA de los beneficios a cobrar, añadiéndose 100 simulaciones más hasta llegar a 1000 simulaciones.

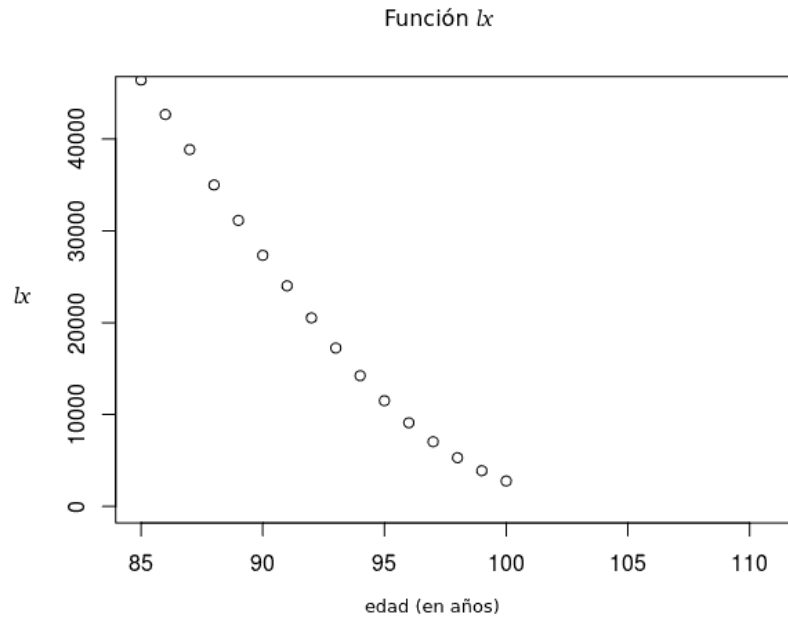


Figura 6: Función l_x para mujeres, proyectada a 2018, con valores evaluados hasta los 100 años Fuente: Elaboración propia a partir de Tablas de mortalidad proyectadas por INE.

Tabla 3: Proyección de la tabla de mortalidad INE para 2018

Edad	l_x Hombres	l_x Mujeres
101	714	1615
102	436	942
103	253	516
104	140	268
105	75	132
106	38	63
107	19	29
108	9	13
109	5	6
110	2	2

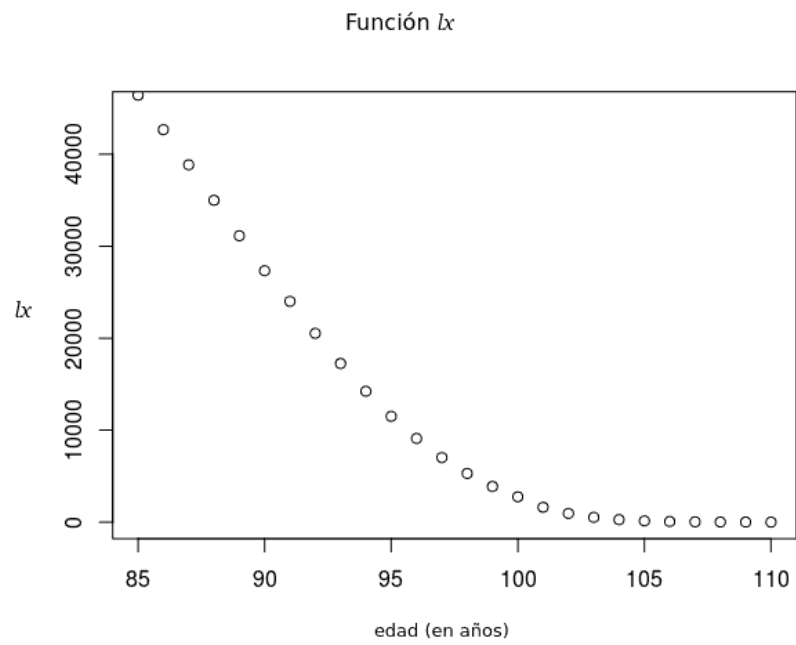


Figura 7: Función l_x para mujeres, proyectada a 2018, con valores evaluados hasta los 110 años Fuente: Elaboración propia a partir de Tablas de mortalidad proyectadas por INE.

Los resultados utilizando los procedimientos de aplicar una tabla única y tablas proyectadas se describen a continuación.

La Tabla 4 muestra los resultados para el caso de usar una tabla INE única correspondiente al 2018 mientras que la Tabla 6 muestra los resultados obtenidos al hacer las simulaciones de los resultados al aplicar las tablas proyectadas por el INE. La Tabla 5 reproduce los resultados obtenidos en la investigación mencionada en los antecedentes.

Tabla 4: Simulaciones usando tabla INE 2018

# Sim	Min.	1st Cuartíl.	Mediana	Media	3rd Cuartíl.	Max.	RI	CV	CA
100	6899.82	7052.79	7128.66	7128.12	7198.26	7311.19	145.47	0.013	1.059
200	6899.82	7082.57	7139.11	7134.17	7193.36	7324.74	110.79	0.012	1.062
300	6899.82	7084.03	7138.09	7134.57	7195.73	7329.33	111.70	0.012	1.062
400	6897.44	7084.20	7139.88	7137.24	7201.63	7357.27	117.43	0.012	1.067
500	6897.44	7080.96	7138.49	7136.50	7201.71	7357.27	120.75	0.012	1.067
600	6897.44	7080.61	7139.30	7136.68	7203.31	7357.27	122.69	0.012	1.067
700	6897.44	7083.71	7140.26	7138.52	7202.40	7357.27	118.69	0.012	1.067
800	6878.36	7084.33	7143.05	7140.16	7203.84	7357.27	119.51	0.012	1.067
900	6878.36	7082.36	7140.29	7138.92	7202.40	7357.27	120.04	0.012	1.067
1000	6878.36	7081.83	7140.57	7138.45	7200.85	7357.27	119.01	0.012	1.067

Tabla 5: Simulaciones usando tabla BCU

# Sim	Min.	1st Cuartíl.	Mediana	Media	3rd Cuartíl.	Max.	RI	CV	CA
100	6932.61	7095.45	7184.23	7173.11	7245.92	7387.72	150.47	0.015	1.066
200	6906.92	7103.35	7170.77	7167.37	7239.00	7387.72	135.64	0.014	1.070
300	6906.92	7103.60	7169.07	7168.40	7237.97	7387.72	134.37	0.014	1.070
400	6906.92	7105.18	7170.23	7171.95	7242.74	7446.78	137.56	0.012	1.078
500	6906.92	7101.12	7165.34	7168.22	7238.60	7446.78	137.48	0.014	1.078
600	6852.86	7100.32	7165.51	7167.53	7241.11	7446.78	140.79	0.014	1.087
700	6852.86	7100.44	7162.97	7166.53	7237.08	7446.78	136.64	0.014	1.087
800	6816.77	7101.12	7165.90	7166.74	7236.83	7446.78	135.71	0.014	1.092
900	6816.77	7098.76	7165.90	7167.06	7236.97	7446.78	138.21	0.014	1.092
1000	6816.77	7097.35	7165.19	7165.83	7235.12	7446.78	137.76	0.014	1.092

Se puede observar en las Figuras 8 y 9 la comparación de los diagramas de caja y de violín que muestran los resultados de los tres procedimientos para calcular el VPA de los beneficios futuros, se observa una pequeña variación de la mediana, siendo el menor valor de la misma la que corresponde al caso de utilizar una única tabla INE, en un valor

Tabla 6: Simulaciones usando tablas INE 2018-2050

# Simulaciones	Min	$x_{0,25}$	$x_{0,5}$	\bar{x}	$x_{0,75}$	Max.	RI	CV	CA
100	6927.00	7108.72	7169.34	7168.98	7225.21	7440.03	116.49	0.014	1.074
200	6869.53	7095.54	7168.21	7163.78	7235.85	7440.03	140.30	0.015	1.083
300	6791.52	7104.70	7175.63	7167.92	7232.22	7440.03	127.52	0.014	1.095
400	6791.52	7106.64	7180.07	7172.28	7242.85	7440.03	136.21	0.012	1.103
500	6791.52	7104.05	7175.82	7169.24	7235.85	7492.94	131.80	0.014	1.103
600	6791.52	7106.64	7177.12	7171.91	7237.96	7492.94	131.31	0.014	1.103
700	6791.52	7106.75	7176.57	7172.82	7240.25	7492.94	133.50	0.014	1.103
800	6791.52	7106.65	7177.94	7173.81	7241.87	7492.94	135.22	0.014	1.103
900	6791.52	7109.28	7180.66	7177.48	7249.01	7492.94	139.72	0.014	1.103
1000	6791.52	7108.35	7178.61	7176.42	7248.03	7492.94	139.67	0.014	1.103

interdamedio se encuentragda la mediana correspondiente a la tabla BCU y finalmente el mayor valor de la mediana corresponde a el caso de utilizar las tablas INE proyectadas hasta el 2050.

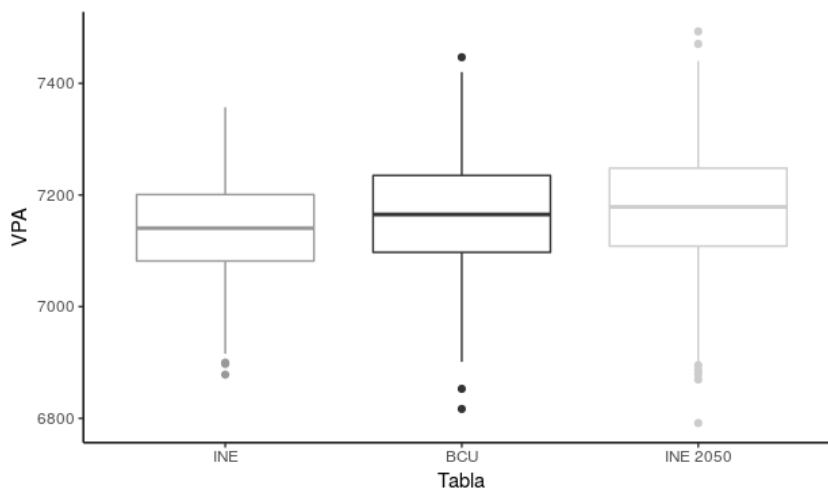


Figura 8: Comparación de la suma del VPA de los beneficios **Elaboración propia.**

En la Figura 10 se pueden apreciar superpuestas, las densidades empíricas resultantes de realizar 1000 simulaciones del VPA de la suma de los beneficios, los resultados son consistentes con lo observado en los diagramas de caja, sin embargo la forma y media de la densidad empírica resulta en una mayor similitud en los casos que se utilizó la tabla BCU y las tablas INE proyectadas a 2050.

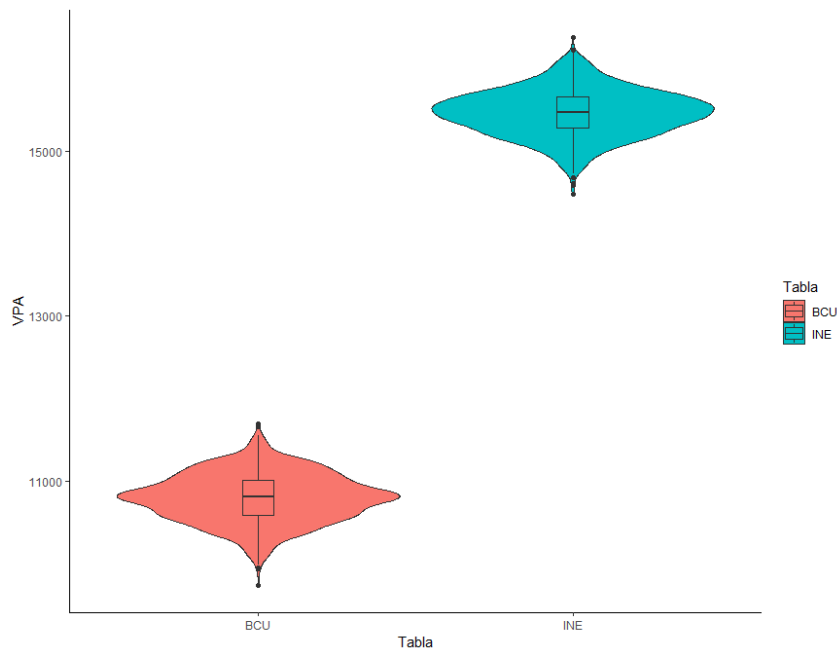


Figura 9: Violin Plot, para la suma del VPA de los beneficios Fuente:Elaboración propia

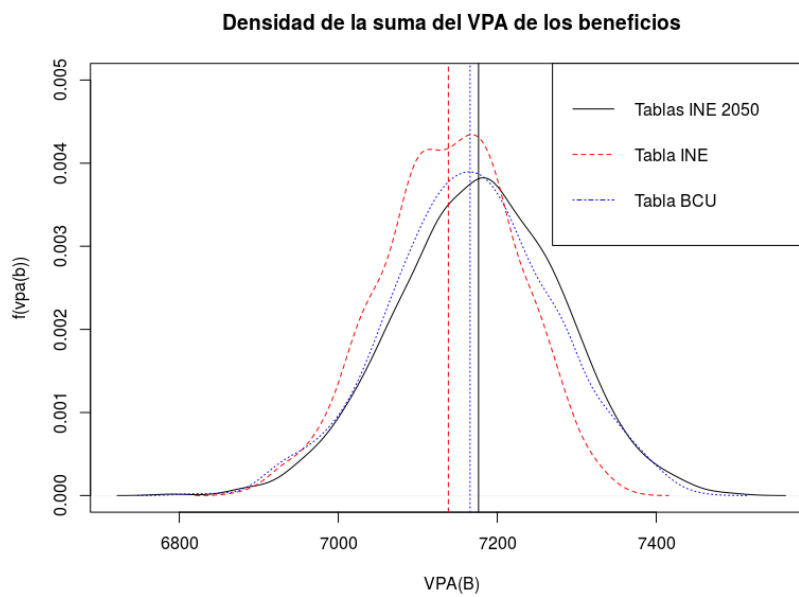


Figura 10: Densidad empírica de la suma de los VPN de los beneficios mediante simulación Fuente:Elaboración propia.

4.2.1. Ajuste de la suma del VPA de los beneficios con tablas INE proyectadas a 2050

Tabla 7: Evolución del ajuste según la cantidad de simulaciones

Simulaciones	Ajuste
100	PowerExponencial
200	Gamma Generalizada
300	Normal
400	Normal
500	Normal
600	Normal
700	Normal
800	Normal
900	Normal
1000	Normal

Se procede a determinar para una repetición de 1000 simulaciones la distribución que ajusta a los beneficios a pagar actualizados al 31/12/2017 utilizando tablas INE 2018-2050:

Utilizando el criterio del AIC se usando la librería *gamlss*, (Rigby y Stasinopoulos, 2005) cual es la distribución que mejor ajusta a los resultados de la simulación es una Normal, con los siguientes parámetros:

$$\hat{\mu} = 7176 \text{ y } \hat{\sigma} = 102$$

por tanto:

$$VPA(B) \sim N(7176; 102)$$

Global Deviance: 12100.3
AIC: 12104.3
SBC: 12114.1

Como la distribución candidata a modelar los resultados es una normal, se procede a realizar una verificación mediante tests no paramétricos utilizando el librería *nortest*. (Gross y Ligges, 2015)

Si bien la distribución Normal tiene una existencia en todos los valores reales y el VPA de la suma de los beneficios es estrictamente positivo, tomando esta distribución, el valor del calculo de probabilidad de obtener un resultado negativo es prácticamente nulo (incluso

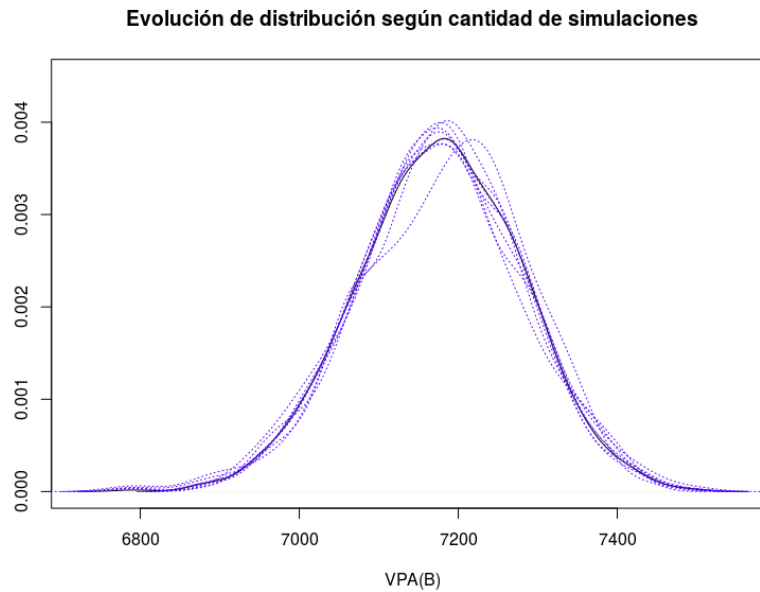


Figura 11: Evolución de la densidad aumentando la cantidad de simulaciones **Fuente:Elaboración propia**

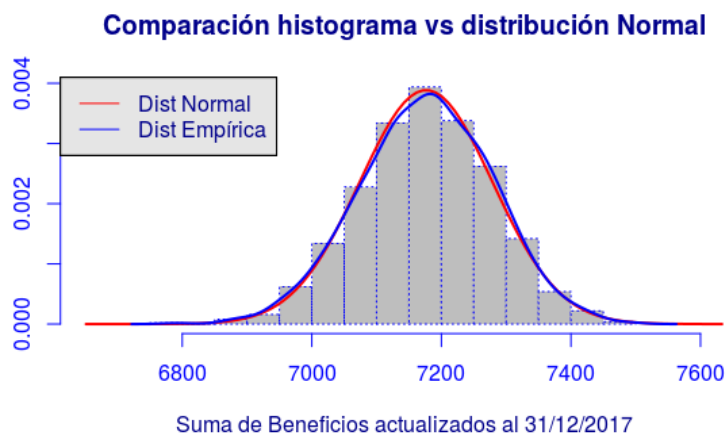


Figura 12: Comparación de histograma del VPA(B) y distribución Normal **Fuente:Elaboración propia.**

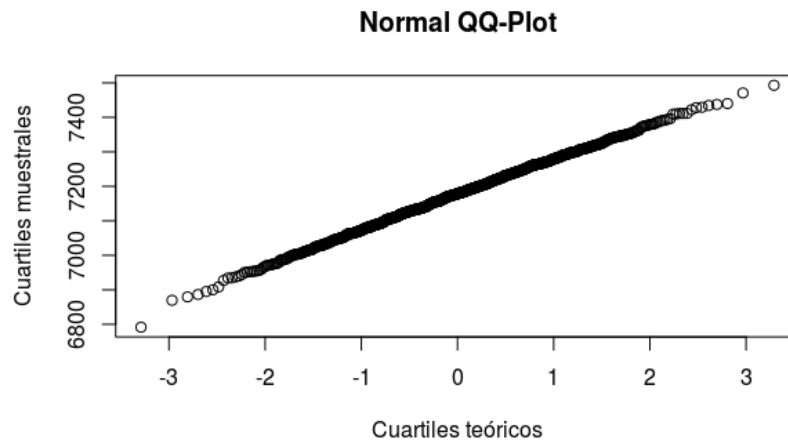


Figura 13: QQ Plot del VPA(B) contra una distribución Normal **Fuente:Elaboración propia.**

Tabla 8: Test no paramétrico para el contraste de normalidad

Test	Estadístico de Contraste	Pvalor	Decisión
Shapiro Wilk	$W = 0.99906$	0.90	No se rechaza Normalidad
Lilliefors	$D = 0.01745$	0.65	No se rechaza Normalidad
Anderson-Darling	$A = 0.20698$	0.89	No se rechaza Normalidad

es más pequeño que lo que puede calcular el software estadístico aplicado, que determinó que $F_{VPA(B)}(0) \cong 0$.

Con esta consideración y los resultados obtenidos por los tests no paramétricos, no se rechaza la normalidad de los datos.

4.2.2. Ajuste de la suma del VPA de los beneficios con la tabla BCU

Se repite el procedimiento realizado, con la misma cantidad de simulaciones, para determinar cuál es la distribución que mejor ajusta a la suma de los VPA de los beneficios, utilizando la tabla de mortalidad proporcionada por el BCU.

Utilizando el criterio del AIC, se determina que la distribución que mejor ajusta los resultados de la simulación es una Normal.

$$\hat{\mu} = 7166 \text{ y } \hat{\sigma} = 102$$

por tanto:

$$VPA(B) \sim N(7166; 102)$$

Global Deviance: 12086.4

AIC: 12090.4

SBC: 12100.2

Tabla 9: Test no paramétrico para el contraste de normalidad

Test	Estadístico de Contraste	Pvalor	Decisión
Shapiro Wilk	W = 0.99803	0.29	No se rechaza Normalidad
Lilliefors	D = 0.011345	0.99	No se rechaza Normalidad
Anderson-Darling	A = 0.23426	0.79	No se rechaza Normalidad

4.2.3. Comparación de distribuciones

Se utiliza el test de Kolmogorov-Smirnov para dos muestras, de modo de comprar las distribuciones empíricas. Se busca verificar si hay evidencia estadística de que hay diferencia entre las distribuciones para un error del 5%, Observando la Tabla 10 puede concluirse que no hay evidencia estadística de que existan diferencias entre los resultados

obtenidos utilizando la tabla BCU y la proyección de tablas hasta el 2050 elaboradas por el INE, pero si se encontró evidencia estadística de que los resultados obtenidos son diferentes si se utiliza la tabla BCU y la tabla elaborada por el INE sin usar proyecciones .

Tabla 10: Test no paramétrico de igualdad de distribución respecto a la tabla BCU

Tabla	Pvalor	Resultado
INE 2018	0.05465	Rechazo igualdad
INE 2018-2050	$1,412 \times 10^{-8}$	No rechazo igualdad

5. Conclusiones

La comparación del VPA de un beneficio que paga 25 UR a los 25 años de aportes a la caja colectiva, donde se parte al día de hoy de una alta prevalencia de personas jóvenes, la distribución de la suma del VPA los beneficios usando de la tabla exigida por la normativa del BCU no presenta diferencias significativas respecto a usar la tabla proporcionada por el INE siempre y cuando se utilicen las tablas que recogen la proyección de la mortalidad hasta el 2050, en cambio si se obtienen diferencias significativas si se utiliza una tabla de mortalidad para población general si no se realizan las proyecciones.

Como la tabla INE sobrestima la probabilidad de fallecimiento de un empleado de una institución financiera es de esperar que una tabla BCU que fuera proyectada hasta el 2050 pudiera dar resultados de la suma de los VPA de los beneficios, superior al obtenido en cualquiera de los tres métodos utilizados.

En cuanto a la distribución ajustada para dicha suma de los VPA, utilizando las tablas proyectadas por el INE, se obtuvo mediante el criterio AIC que el mejor ajuste se hace a través de una distribución Normal con media 7176 y desviación estándar 102, este resultado se convalidó utilizando tests de ajustes no paramétricos. En el caso de usar la tabla BCU, también se ajusta por una distribución Normal, pero con media 7166 y desviación estándar 102.

Los resultados observados para el Uruguay hace suponer que sucede algo similar con los cálculos actuariales en todos los países que están atravesando la transición demográfica y que observan una disminución de su mortalidad, previendo que la misma continúe disminuyendo en los próximos años.

6. Consideraciones finales

Dado lo establecido en las conclusiones, sería deseable en futuras investigaciones, el proyectar la tabla de mortalidad específica para este tipo de instituciones para recoger la disminución de mortalidad esperada para nuestro país en los próximos años.

También sería relevante estudiar el impacto en los resultados anteriores aplicados a una población comprendida en otros tramos etarios, considerando las previsiones de envejecimiento poblacional.

Referencias Bibliográficas

- Bowers, Gerber, Hickman, Jones, y Nesbitt (1997). *Actuarial mathematics*. SOA.
- Díaz, F. F. C. (2011). *Selección de modelos mediante criterios de información en análisis factorial. Aspectos teóricos y computacionales*.
- Gross, J. y Ligges, U. (2015). *nortest: Tests for Normality*. R package version 1.0-4.
- INE (2014). Estimaciones y proyecciones de la población de Uruguay: metodología y resultados. Revisión 2013.
- Kirk, D. (1996). Demographic Transition Theory.
- Lam, D. (2017). The worlds next 4 billion people will differ from the previous 4 billion. *NIUSS*.
- Mathews, J. y Fink, K. (2000). *Métodos Numéricos con MATLAB*.
- R Core Team (2017). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.
- Rigby, R. A. y Stasinopoulos, D. M. (2005). Generalized additive models for location, scale and shape,(with discussion). *Applied Statistics*, 54:507–554.
- Rofman, R., Amarante, V., y Apella, I. (2016). Cambio demográfico y desafíos económicos y sociales en el Uruguay del siglo xxi. *CEPAL*.

Instituto de Estadística

Documentos de Trabajo



Eduardo Acevedo 1139. CP 11200 Montevideo, Uruguay

Teléfonos y fax: (598) 2410 2564 - 2418 7381

Correo: ddt@iesta.edu.uy

www.iesta.edu.uy

Área Publicaciones

Octubre, 2019

DT (19/5)